MATEMATIK
Göteborgs universitet

Datum: 20040821
Klockan: 8.45–13.45
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Georgios Foufas, 0702-740902
Johan Jansson, 0739-779268

Tentamensskrivning i LMA 100, Matematik för lärare 1, del 2

1. Formulera och bevisa Pythagoras' sats.

2. Bestäm minsta avståndet från punkten $(3, 1, -3)$ till linjen genom punkterna $(2, 0, -2)$ och $(0, -1, -2)$.

3. Bestäm ekvationen för planet som innehåller punkterna $(4, 2, 0)$, $(2, 1, 0)$ och $(5, 3, -1)$.

4. I fyrhörningen $ABCD$ gäller att diagonalerna AC och BD är vinkelräta mot varandra. Visa att $|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$.

5. Lös ekvationen

$$z^3 = -27$$

där z är ett komplext tal. Svara på formen $z = a + ib$ där a och b är reella tal och alla trigonometriska uttryck förenklats och rita lösningarna i det komplexa talplanet.

6. Visa att följande relation $\sim$ på mängden av polynom över $\mathbb{R}$ är en ekvivalensrelation:

$$p(X) \sim q(X) \iff X \mid (p(X) - q(X)),$$

dvs polynomen $p(X)$ och $q(X)$ är relaterade om X delar deras differens.

7. I följande uppgifter krävs endast svar.

1. Ge exempel på ett polynom som är irreducibelt över $\mathbb{R}$, men reducibelt över $\mathbb{C}$.
2. Faktorisera $X^4 - 4$ i irreducibla polynom över $\mathbb{C}$.
3. Bestäm resten då polynomet $X^3 - 9X - 7$ divideras med polynomet $X - 3$.

8. Motivera dina svar i följande uppgifter.

1. Avgör om funktionen $f(x) = x^3$ från $\mathbb{R}$ in i $\mathbb{R}$ är injektiv, respektive surjektiv.
2. Avgör om funktionen är $f(z) = z^4 + 28$ från $\mathbb{C}$ in i $\mathbb{C}$ är injektiv, respektive surjektiv.
3. Ge exempel på en funktion från $\mathbb{R}$ in i $\mathbb{R}$, som varken är surjektiv eller injektiv.

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
Tentan räknas vara färdigrättad fredagen den 3 september.
Lycka till!

Robert Berman och Jan Stevens