MATEMATIK
Göteborgs universitet

Datum: 20050607
Klockan: 8.30–13.30
Hjälpmedel: Inga
Telefonvakt: Iulia Pop,
076 - 218 66 54

Tentamensskrivning i LMA 100, Matematik för lärare 1, del 2

1. Visa bisektrissatsen: bisektrisen till en vinkel i en triangel delar motstående sida i delar som är proportionella mot de övriga sidor.

2. Bestäm ekvationen för planet som innehåller de tre punkterna $(3, 2, 1)$, $(5, 4, 2)$ och $(3, 2, 0)$.

3. Bestäm minsta avståndet från origo till linjen genom punkterna $(7, 3, 1)$ och $(-1, -3, 7)$.

4. Bestäm vinklarna i triangeln i rummet med hörn $(1, 1, 1)$, $(2, 3, 0)$ och $(4, 1, -5)$.

5. Vi definierar en talföljd $a_1, a_2, a_3, \ldots$ rekursivt genom

$$\begin{cases} a_1 &= 1, \\ a_{n+1} &= -a_n + (-1)^n \cdot 2, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

a) Beräkna a_7 genom att använda rekursionen.
b) Bevisa att $a_n = (-1)^{n+1}(2n - 1)$ för alla $n \geq 1$.

6. Låt $f(X) = X^2 + 2X + 6$ och $g(X) = X^4 - X^2 - 2$ vara två polynom.
a) Motivera att $f(X)$ är irreducibelt över de reella talen men reducibelt över de komplexa talen.
b) Faktorisera $g(X)$ i irreducibla polynom över de komplexa talen, över de reella talen samt över de rationella talen.

7. Låt $z = 1 - i$ vara ett komplext tal.
a) Skriv z på polär form.
b) Skriv z^{99} på både polär form och på formen $a + bi$ där a och b är explicit angivna (innehåller inte några trigonometriska funktioner).

8. Vi definierar en relation R på mängen av reella polynom, $\mathbb{R}[X]$, genom att säga att ett polynom $f(X)$ är relaterat till ett polynom $g(X)$ om och endast om $g(X)$ har samma reella nollställen som $f(X)$.
a) Motivera att R är en ekvivalensrelation.
b) Ge ett exempel på två olika polynom av grad 2 som är relaterade till varandra.
c) Ge exempel på ett polynom av grad 2 och ett av grad 4 som är relaterade till varandra.

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.
Tentan räknas vara färdigrättad torsdagen den 23 juni.
Lycka till!

Stefan Lemurell och Jan Stevens