MATEMATIK sl/js
Göteborgs universitet

Lösningar till tentamensskrivningen
LMA 100 , Matematik för lärare 1, del 2, 20050607

1. **Visa bisektrissatsen: bisektrisen till en vinkel i en triangel delar motstående sida i delar som är proportionella mot de övriga sidor.**

   Se kompendiet om Euklidisk geometri.

2. **Bestäm ekvationen för planet som innehåller de tre punkterna $(3,2,1)$, $(5,4,2)$ och $(3,2,0)$.**

   Normalvektorn till planet är vinkelrät mot vektorerna $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ och fås som vektorprodukt $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$. Ekvationen är $-x+y=-1$ eller $x-y=1$.

3. **Bestäm minsta avståndet från punkten origo till linjen genom punkterna $(7,3,1)$ och $(-1,-3,7)$.**

   Linjen genom $(7,3,1)$ och $(-1,-3,7)$ ges i parameterform av $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\3\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\3\\-3\end{pmatrix}$ och avståndet är minst i punkten där planet genom origo, vinkelrät mot linjen, skär linjen. Planet har ekvation $4x+3y-3z=0$. I skärningspunkten gäller $28+16t+9+9t-3+9t=0$, så $34+34t=0$ och $t=-1$. Skärningspunkten är $(3,0,4)$ och avståndet till origo är $\sqrt{9+16}=5$.

4. **Bestäm vinklarna i triangeln i rummet med hörn $(1,1,1)$, $(2,3,0)$ och $(4,1,-5)$.**

   Låt $A=(1,1,1)$, $B=(2,3,0)$ och $C=(4,1,-5)$. Då är $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ med längd $\sqrt{6}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix}$ med längd $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ och $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-5\end{pmatrix}$ med längd $\sqrt{33}$. Vi har $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\alpha$, så $9 = 3\sqrt{30}\cos\alpha$ och $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{30}}{10}$. Från $-3 = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CB}|\cos\beta$ får vi $\beta = \arccos -\frac{1}{\sqrt{22}}$ och slutligen är $\gamma = \arccos\frac{36}{3\sqrt{5}\sqrt{33}} = \arccos\frac{12}{\sqrt{165}}$.

5. **Vi definierar en talföljd $a_1, a_2, a_3, \ldots$ rekursivt genom**

$$\begin{cases} a_1 &= 1, \\ a_{n+1} &= -a_n + (-1)^n \cdot 2, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

   a) Beräkna a_7 genom att använda rekursionen.
   b) Bevisa att $a_n = (-1)^{n+1}(2n-1)$ för alla $n \geq 1$.

a) Vi får successivt att $a_2 = -1 + (-1)^1 \cdot 2 = -1 - 2 = -3$, $a_3 = 3 + 2 = 5$, $a_4 = -5 - 2 = -7$, $a_5 = 7 + 2 = 9$, $a_6 = -9 - 2 = -11$, $a_7 = 11 + 2 = 13$.
b) Vi gör ett induktionsbevis.
Basfall: Sätt $n = 1$. Då är

$$(-1)^{n+1}(2n - 1) = (-1)^2(2 \cdot 1 - 1) = 1 \cdot 1 = 1 = a_1$$

så basfallet stämmer.
Induktionssteg: Antag nu att $a_k = (-1)^{k+1}(2k - 1)$ för något positivt heltal k. Vi ska visa att i så fall är också

$$a_{k+1} = (-1)^{(k+1)+1}(2(k + 1) - 1) = (-1)^{k+2}(2k + 2 - 1) = (-1)^k(2k + 1).$$

Vi får genom att utnyttja rekursionen och induktionsantagandet att

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= -a_k + (-1)^k \cdot 2 = -(-1)^{k+1}(2k - 1) + (-1)^k \cdot 2 \\ &= (-1)^{k+2}(2k - 1) + (-1)^k \cdot 2 = (-1)^k(2k - 1) + (-1)^k \cdot 2 \\ &= (-1)^k(2k - 1 + 2) = (-1)^k(2k + 1), \end{aligned}$$

vilket var precis vad vi skulle visa.
Enligt induktionsaxiomet gäller därmed att $a_n = (-1)^{n+1}(2n - 1)$ för alla $n \geq 1$.

6. Låt $f(X) = X^2 + 2X + 6$ och $g(X) = X^4 - X^2 - 2$ vara två polynom.
a) Motivera att $f(X)$ är irreducibelt över de reella talen men reducibelt över de komplexa talen.
b) Faktorisera $g(X)$ i irreducibla polynom över de komplexa talen, över de reella talen samt över de rationella talen.

a) Polynomet $f(X) = X^2 + 2X + 6$ har de två ickereella rötterna $\alpha = -1 + \sqrt{5}i$ och $\bar{\alpha} = -1 - \sqrt{5}i$. Det betyder att över de komplexa talen får vi

$$f(X) = (X - \alpha)(X - \bar{\alpha})$$

och alltså reducibelt. Över de reella talen är det dock irreducibelt eftersom ett andragradspolynom är irreducibelt över ett talområde om och endast om det saknar nollställen i talområdet.
b) Vi söker rötter till $g(X)$ genom att först göra substitutionen $t = X^2$ (det finns bara jämna potenser). Vi får $t^2 - t - 2 = 0$ som har lösningarna $t_1 = -1$ och $t_2 = 2$. Det ger rötterna $x_{1,2} = \pm i$ och $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$. Därmed får vi en faktorisering över de komplexa talen som ser ut som

$$g(X) = (X - i)(X + i)(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2}).$$

De två sista faktorerna är reella. Om man multiplicerar de två första (som är konjugerade) så får man $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$, vilket är reellt. Faktoriseringen över de reella talen blir alltså

$$g(X) = (X^2 + 1)(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2}).$$

De sista två faktorerna är inte rationella, men produkten av dem $X^2 - 2$ är det, så över de rationella talen får man faktoriseringen

$$g(X) = (X^2 + 1)(X^2 - 2).$$

7. Låt $z = 1 - i$ vara ett komplext tal.
a) Skriv z på polär form.
b) Skriv z^{99} på både polär form och på formen $a + bi$ där a och b är explicit angivna (innehåller inte några trigonometriska funktioner).

a) Absolutbeloppet för z är $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ och argumentet är t.ex. $-\pi/4$ eller $7\pi/4$. Därmed blir z på polär form:

$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

b) Vi får från de Moivres formel att

$$z^{99} = (\sqrt{2})^{99}\left[\cos\left(-\frac{99\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{99\pi}{4}\right)\right].$$

Vi har att

$$-\frac{99\pi}{4} = -26\pi + \frac{5\pi}{4},\ \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

och $(\sqrt{2})^{99} = 2^{49}\sqrt{2}$. Därmed får vi att

$$z^{99} = 2^{49}\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

på polär form och

$$z^{99} = -2^{49} - 2^{49}i$$

på formen a+bi.

8. Vi definierar en relation R på mängen av reella polynom, $\mathbb{R}[X]$, genom att säga att ett polynom $f(X)$ är relaterat till ett polynom $g(X)$ om och endast om $g(X)$ har samma reella nollställen som $f(X)$.

a) Motivera att R är en ekvivalensrelation.

b) Ge ett exempel på två olika polynom av grad 2 som är relaterade till varandra.

c) Ge exempel på ett polynom av grad 2 och ett av grad 4 som är relaterade till varandra.

a) Relationen är uppenbarligen *reflexiv* eftersom ett polynom har samma reella nollställen som sig själv.
Den är *symmetrisk*, eftersom om g har samma reella nollställen som f så har ju f samma reella nollställen som g.
Den är *transitiv*, eftersom om g har samma reella nollställen som f och h har samma reella nollställen som g så har ju utan tvivel också h samma reella nollställen som f.
b) Vi kan t.ex. ta $f(X) = X^2 - 1$ och $g(X) = 2(X^2 - 1) = 2X^2 - 2$ eller också vilket par som helst som saknar reella nollställen.
c) Vi kan t.ex. ta $f(X) = X^2 - 1$ och $g(X) = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = X^4 - 1$ eller också vilket par som helst som saknar reella nollställen.