Explorativ övning Geometri

De viktigaste begreppen och satser i detta avsnitt är:

- Kongruens och likhet mellan sträckor, vinklar och trianglar.
- Kongruensfallen för trianglar.
- Parallella linjer (likbelägna vinklar och alternativvinklar).
- Yttervinkelsatsen, vinkelsumman i en triangel.
- Längd och area.
- Likformighet av trianglar och likformighetsfallen.
- Pythagoras sats.
- Några viktiga satser om trianglar (bisektriser, medianer, höjder).
- Konstruktioner med passare och linjal.

Vi skall också utnyttja kunskaper från detta avsnitt för att få bättre förståelse av vad man menar med deduktiv vetenskap och axiomatisk metod i matematiken.

I första hand försök lösa uppgifterna **A, B, C, D, E, G, H, J, K, M, P, Q, R**.

Övning A

Läs om "Axiom och primitiva begrepp". Försök därefter besvara följande frågor och diskutera svaren i din grupp:

LMA100, vt 06

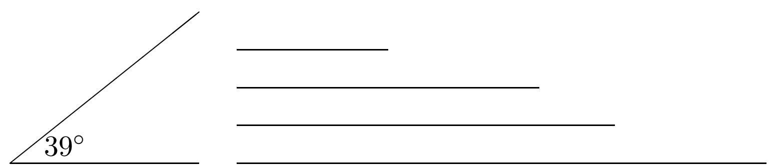
1. Hur kan man föreställa sig en axiomatisk teori? Vad är ett primitivt begrepp? Vad är ett axiom? Försök svara på dessa frågor genom att jämföra axiomatisk teori med ett spel t ex schack. Vad är “primitiva begrepp” i schackspel? Vad är axiomen?

2. Ge exempel på några definitioner (t ex av några geometriska figurer eller parallella linjer). Vilken roll spelar definitionerna och varför är de viktiga? Försök svara på dessa frågor genom att jämföra definitionerna med förklaringar av ord i ett främmande språk (eller främmande ord i svenskan).

3. Vad är skillnaden mellan axiom och satser? Ge exempel på ett axiom och ett exempel på en sats.

Övning B

Syftet med uppgiften är att konstruera trianglar med givna sidor eller vinklar. Det underlättar att använda en markerad linjal och gradskiva. Det går också att bara använda passare och linjal, och en given vinkel på 39° och fyra sträckor, 2, 4, 5 och 7 cm.:



1. Konstruera en liksidig triangel med sidolängd 4 cm.

2. (S–V–S) Konstruera en triangel $\Delta\, ABC$ med $\angle A = 39°$, $\overline{AB} = 5$ cm och $\overline{AC} = 4$ cm.

3. (V–S–V) Konstruera en triangel $\Delta\, ABC$ med $\angle A = 39°$, $\overline{AB} = 5$ cm och $\angle B = 45°$.

4. (V–V–S) Konstruera en triangel $\Delta\, ABC$ med $\angle A = 39°$, $\overline{AB} = 5$ cm och $\angle C = 45°$.

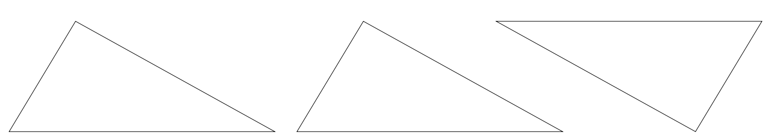
5. (S–S–S) Konstruera en triangel $\Delta\, ABC$ med $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{AC} = 4$ cm och $\overline{BC} = 2$ cm. Går det att konstruera en triangel med $\overline{AB} = 7$ cm, $\overline{AC} = 4$ cm och $\overline{BC} = 2$ cm?

6. (S–S–V) Konstruera en triangel $\Delta\, ABC$ med $\angle A = 45°$, $\overline{AC} = 4$ cm och $\overline{CB} = 3$ cm. Vad händer om i stället $\overline{CB} = 5$ cm; och om $\overline{CB} = 2$ cm?

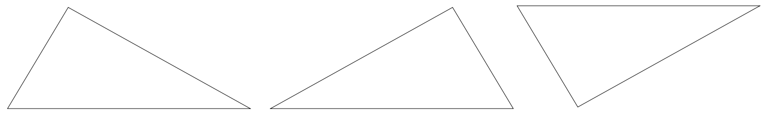
Övning C

1. Vad menas med att två trianglar är lika? När säger man att två trianglar är kongruenta?

2. Är följande trianglar lika? Är de kongruenta?



3. Samma fråga som ovan om trianglarna:



4. Vad är skillnaden mellan de båda fallen ovan?

5. Vad behöver man veta enligt definitionen av kongruensbegreppet mellan trianglar för att kunna konstatera att två trianglar är kongruenta? Är det nödvändigt att alla villkor i definitionen (6 stycken) gäller? Vilken information räcker för att sluta sig till att två trianglar är kongruenta?

6. Försök definiera kongruensbegreppet för fyrhörningar. Formulera dina egna "kongruensfall" för två fyrhörningar (tänk inte för länge på uppgiften).

Övning D

Denna övning handlar om parallellogrammer.

1. Vet du vad en parallellogram är?

   Vi definierar en parallellogram som fyrhörning där motstående sidor är parvis parallella.

2. Visa att motstående vinklar i en parallellogram är kongruenta.

3. Visa att motstående sidor i en parallellogram är kongruenta.

4. Visa att om alla vinklar i en fyrhörning är räta, så är fyrhörningen en parallellogram (en sådan parallellogram kallas för rektangel).

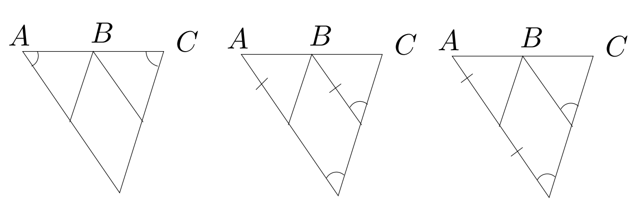
5. I parallellogrammen $ABCD$ är $\angle A$ rät. Visa att $ABCD$ är en rektangel.

6. Visa att om i en fyrhörning motstående sidor är lika stora, så är fyrhörningen en parallellogram.

7. Visa att diagonalerna i en parallellogram delar varandra mitt itu.

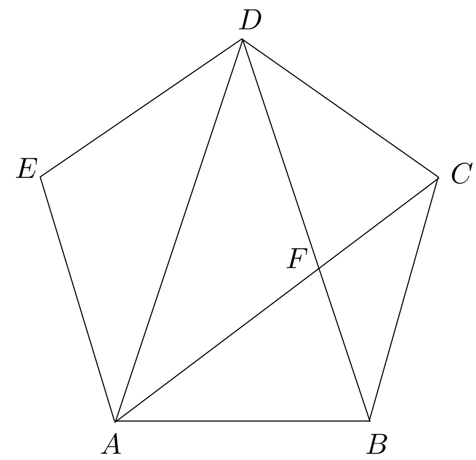
Övning E

1. I vilka av följande figurer kan man *säkert* säga att B är mittpunkt på AC, och i vilka figurer är det *inte säkert* att B är mittpunkten. Motivera ett positivt svar eller ge ett motexempel. (Man ska inte lita på figuren, men bara utnyttja de markerade kongruenser).

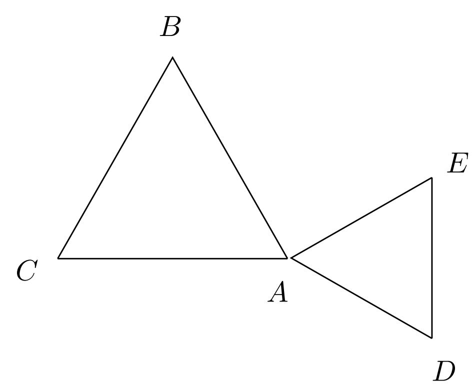


2. Bestäm vinkelsumman i en n-hörning.

3. I en regelbunden femhörning $ABCDE$ är diagonalerna AC, AD och DB dragna. Bestäm vinklarna i trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle ABD$. Vilka trianglar i figuren är kongruenta?

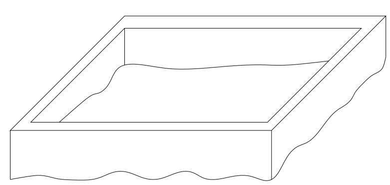


4. Låt $\triangle ABC$ och $\triangle ADE$ vara två liksidiga trianglar med gemensam hörn A, enligt figur. Visa att $|CE| = |BD|$, samt bestäm den vinkel under vilken linjerna CE och BD skär varandra. (Undersök gärna vad som händer om man vrider $\triangle ADE$ kring hörnet A).



Övning F

Många människor (alla snickare) vet hur man genom att enbart mäta längder (med t ex ett måttband) kan kontrollera om en husgrund (eller ett rum, o s v) är rektangulär. (Om ni inte vet ingår det i uppgiften att tänka ut detta).



1. Skriv upp alla steg i en sådan process.

2. Bevisa att metoden är korrekt.

3. Diskutera värdet med att ge ett sådant bevis: bra/dåligt? Varför?

Övning G

Denna övning handlar om längd och mätning.

1. Redan tidigare användes begreppet längd av en sträcka (hur?). Man tar väl för givet att varje sträcka kan tillordnas ett mätetal, som är ett positivt reellt tal. Diskutera vad som menas med detta.

2. Vad menas med en enhet? Kan en enhet delas? Kan den delas hur många gånger som helst?

3. Två sträckor är kommensurabla, om förhållandet mellan deras längder är rationellt. Är sidan och diagonalen i en kvadrat kommensurabla?

4. Hur kan man avgöra om två sträckor är kommensurabla?

5. Vad menas med avståndet mellan två (parallella) linjer? Hur mäter man det?

Övning H

1. Vet du vad *area* är? Vad är en yta. Vad är skillnaden?

2. Låt $ABCD$ och $ABC'D'$ vara två parallellogrammer med samma bas AB och samma höjd, d v s C' och D' ligger på linjen CD. Visa att de har samma area. (Ledning: lägg till och drag ifrån sinsemellan kongruenta trianglar). Drag slutsatsen att arean för en parallellogram är lika med basen gånger höjden.

3. Visa att arean av en triangel är $\frac{1}{2}$ basen $\cdot$ höjden .

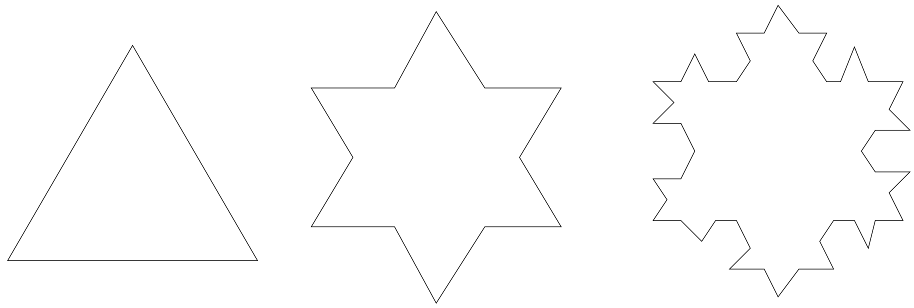
4. Låt CM vara medianen genom hörnet C i triangeln ABC (d v s M är mittpunkt på AB). Visa att trianglarna $\triangle AMC$ och $\triangle BMC$ har samma area.

5. I $\triangle ABC$ är $|AB| = 16$, $|BC| = 22$ och höjden CM är 11. Beräkna längden av höjden AN.

Övning I

1. Kan det vara så att en figur med ändlig area kan ha en godtycklig stor omkrets?

Vi studerar von Kochs 'snöflingestjärna'.



Om vi kallar de olika stjärnorna S_i med triangeln S_1 som början, så kan vi beskriva att man får S_{i+1} ur S_i genom att sätta en liksidig triangel på den mittersta tredje delen av varje sida (och att ta bort dubbla sträckor).

2. Beräkna längden av omkretsen av stjärna S_n.

3. Vad händer med omkretsen då $n \to \infty$?

Övning J

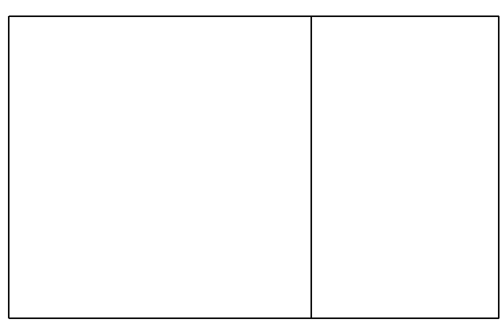
Likformighetsbegreppet.

1. Tänk igen på vad som menas med att två figurer är lika, är kongruenta, är likformiga (har "samma form").

2. Vad menas med att två trianglar är likformiga? Jämför med kongruensdefinitionen. Vad behöver man veta enligt definitionen av likformighetsbegreppet mellan trianglar för att kunna konstatera att två trianglar är likformiga? Är det nödvändigt att alla villkor i definitionen (6 stycken) gäller? Vilken information räcker för att sluta sig till att två trianglar är likformiga?

3. Behöver två figurer som är likformiga vara kongruenta och/eller lika? Varför/varför inte? Är två kvadrater likformiga? När är de lika eller kongruenta?

4. **Gyllene snittet**: hitta en rektangel sådan att om man tar bort en kvadrat så återstår en rektangel som är likformig med den ursprungliga (d v s beräkna förhållandet mellan sidorna).



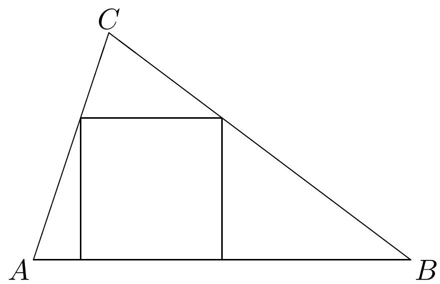
Övning K

1. Ange vilka trianglar i figuren av uppgift E.1 är likformiga.

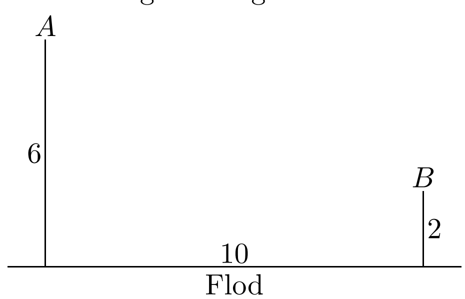
2. Låt D vara mittpunkten på sidan AC i $\triangle ABC$ och E mittpunkten på BC. Drag DE och diagonalerna AE och BD. Vilka trianglar är nu likformiga?

3. I triangeln $\triangle ABC$ är A' mittpunkten på BC, B' mittpunkten på AC och C' mittpunken på AB. Visa att $\triangle A'B'C'$ är likformig med $\triangle ABC$.

4. I en triangel $\triangle ABC$ är en kvadrat inskriven med en sida efter sidan AB. Längden av sidan AB är 10, och höjden mot denna sida är 6. Bestäm längden av kvadratens sida.

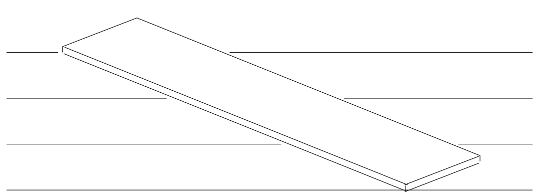


5. En myrslok som befinner sig i A skall gå till floden för att dricka och sedan gå till B för att sova. Hur lång blir hans vandring om de göres så kort som möjligt?



Övning L

1. Om man vill dela en bräda i 3 lika delar så kan man skaffa sig 4 parallella linjer (t ex springor i ett parkettgolv) med lika avstånd.



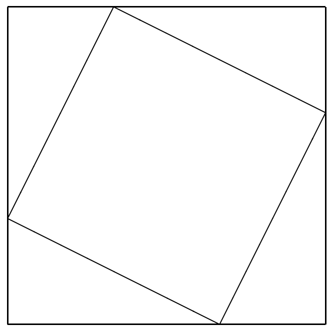
   Ni får förtydliga metoden själva. Verkar den praktisk? Varför är den korrekt? (Ge ett bevis!).

2. Hitta på en metod att dela brädan i förhållandet $2:5$, $1:4$, $1:n$, $m:n$.

Övning M

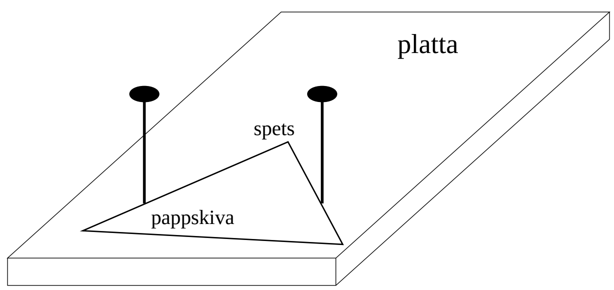
Pythagoras sats.

1. Formulera satsen.
2. Tag reda på så många bevis för Pythagoras sats som du kan.
3. Gör ett bevis med hjälp av areaberäkningar i figuren:



Övning N

Betrakta följande experimentuppställning bestående av en platta med två spikar och en triangelformad pappskiva. Gör en egen (plattan kan ersättas med en pappersark med två markerade punkter).



Om pappskivan skjutes in mot spikarna kommer spetsen att hamna i en bestämd punkt — markera denna punkt. Variera nu detta förfarande och du får en mängd punkter. Dessa punkter hamnar på en kontinuerlig kurva (varför?). Hur ser kurvan ut? Kan du bevisa ditt förmodan?

Övning O

Om du befinner dig på havet och ser t ex två fyrar under konstant vinkel — trots att du rör dig — vad betyder det? Kan du hitta på ett sätt att kontrollera att du inte rör dig? (Detta kan vara viktigt om man ligger för ankar på redden.)

Övning P

1. De tre medianerna i en trianglar delar upp triangeln i sex mindre trianglar. Visa att de sex trianglarna har samma area.

2. Två cirklar skär varandra i punkterna A och B. Punkten C ligger på den första cirkeln diametral mot A och punkten D diametral mot A på den andra cirkeln. Visa att B, C och D ligger på en linje.

3. Hur långt är det till horisonten från toppen av Eiffeltornet. Tornet är 300 m högt och jorden antas vara ett klot med en radie på 600 mil.

Övning Q

Låt $\triangle ABD$ vara en likbent triangel och C mittpunkten på AD. Antag att $|BC| = a$, $|AC| = b$ och $|AB| = |DB| = c$, där $a^2 + b^2 = c^2$. Bestäm avståndet mellan B och

(a) medianernas skärningspunkt,

(b) bisektrisernas skärningspunkt,

(c) mittpunktsnormalernas skärningspunkt,

(d) höjdernas skärningspunkt.

Observera att all dessa punkter ligger på linjen BC.

Övning R

Geometriska konstruktioner med passare och linjal.

1. Konstruera bisektrisen till en given vinkel.

2. Givet en cirkel och en punkt P utanför cirkeln, konstruera de tangenter till cirkeln som går genom P.

3. Tre sträckor med längderna 1, a och b är givna. Beskriv hur man konstruerar en sträcka med längden a/b.

4. En enhetssträcka är given. Visa hur man utgäende från denna kan konstruera en sträcka med längden $\sqrt{7}$.

5. Förklara hur man utan att mäta kan addera och subtrahera kvadrater med hjälp av Pythagoras sats (dvs med passare och linjal konstruera en kvadrat vars area är summan respektive skillnaden av areorna av två givna kvadrater).

Övning S

Varför byter en spegel höger och vänster, men inte upp och ner, och vad händer om du inte står men ligger framför spegeln?