

INLEDNING TILL EUKLIDISK GEOMETRI

Jan Stevens

MATEMATISKA VETENSKAPER
GÖTEBORGS UNIVERSITET
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
GÖTEBORG 2007

Förord

Detta kompendium är tänkt för undervisning i geometri för blivande lärare. Ett första syfte är att förmedla kunskaper om grundläggande geometriska begrepp och resultat. En viktig roll i detta spelar övningarna till kursen, som distribueras separat.

Matematiska sanningar grundar sig på logiska resonemang, inte på experimentell verifikation eller överenskommelser. Geometrin har i århundraden varit paradexemplet för en deduktiv vetenskap och den axiomatiska metoden. Det skulle emellertid föra för långt att ge här en konsekvent axiomatisk framställning.

Ett tredje mål är att ge historisk kännedom om Euklides och hans verk, som har präglats matematikundervisningen i så lång tid.

Jan Stevens

Innehåll

1.	Inledning	1
2.	Euklides Elementa	2
3.	Parallellpostulatet	3
4.	Axiom och primitiva begrepp	5
5.	Kongruens av trianglar	7
6.	Vinklar	10
7.	Konstruktioner med passare och linjal	12
8.	Area	14
9.	Likformighet	15
10.	Pythagoras sats	18
11.	Sinus- och cosinussats	20
12.	Mer om cirkeln	22
13.	Speciella punkter i en triangel	23

1. Inledning

Geometri är en av de äldsta vetenskaperna. Många resultat var redan bekanta i de egyptiska, babyloniska och kinesiska kulturerna. Själva ordet geometri kommer från grekiska och betyder landmätning. Ursprungligen var geometrin en samling regler för att lösa praktiska problem. Det var först de gamla grekerna, med bl a Thales och Pythagoras, som gjorde geometrin till en vetenskap på deduktiva grunder, där påståenden bevisas genom logiska resonemang. Kunskaperna samlades av Euklides i hans "Elementa".

Euklides var en grekisk matematiker utbildad vid den Platonska Akademien i Aten och verksam i Alexandria ca 300 f Kr. Hans verk i 13 volymer ägnas huvudsakligen just åt geometri, men innehåller också flera aritmetiska resultat (t ex beviset att det finns oändligt många primtal). Euklides försökte bygga upp en konsekvent deduktiv matematisk teori – ett antal klara förutsättningar om punkter, linjer och plan skulle kunna användas som utgångspunkt till att med hjälp av logiska resonemang härleda olika egenskaper hos geometriska figurer. Dessa förutsättningar – den euklidiska geometrins "spelregler" – kallas **axiom** eller **postulat** och gäller så kallade **primitiva begrepp** som punkter, linjer och plan samt vissa enkla geometriska figurer (som t ex sträckor och cirklar).

Euklides böcker betraktades under flera hundra år som ett mönster för hur vetenskapliga teorier borde formas. De användes som skolläroböcker så sent som i slutet av 1800-talet. En noggrann och kritisk analys av Euklides text visade då på en del brister i hans teori vars framställning modifierades något (av bl a David Hilbert), men Euklides huvudidé lever kvar – hela matematikens uppbyggnad följer samma deduktiva principer som den euklidiska geometrins. Det har skrivits tusentals läroböcker i geometri som under en lång tid var en av de viktigaste delarna i skolmatematiken. På 1960-talet försökte man modernisera presentationen av euklidisk geometri i skolan. Reformen var inte förberedd ordentligt vare sig när det gällde lämpliga läroböcker eller lärarnas fortbildning. Detta ledde till att den euklidiska geometrin nästan försvann från kursplanerna. Men geometrin har i viss mån kommit tillbaka. Geometrin är en mycket viktig del av vårt vardagliga liv – en modell av geometriska former som vi finner i vår omgivning. Kunskaper om enkla geometriska figurer är lika viktiga som kunskaper om t ex talsystem och måste betraktas som en mycket viktig del av allmänbildningen. Geometrin är mycket mera intuitiv och lättare att förstå än t ex en del egenskaper hos talsystem. Man måste dock medge att en sträng uppbyggnad av euklidisk geometri är relativt komplicerad och att det finns mycket enklare exempel på matematiska teorier som ger en klarare uppfattning om hur en axiomatisk teori fungerar. Tyvärr förpassades euklidisk geometri från skolmatematiken nästan fullständigt och ersattes då inte med något annat som kunde tillgodose behovet av ett

bra exempel på hur man kan utveckla en riktig matematisk teori (en matematisk modell) för att studera vår omgivning.

2. Euklides Elementa

Euklides börjar första boken av sina Elementa med 23 definitioner. Vissa av dem skall ge en visuell föreställning hos läsaren av grundläggande begrepp som punkt och linje. Euklides förklarar att en **punkt** är något som inte kan delas. En punkt är alltså en geometrisk atom. Detta är kanske en tilltalande analogi, men har ingen abstrakt matematisk betydelse. Samma sak gäller för linje: en **linje** är en längd utan bredd. En linjes ändar är punkter. En **rät linje** är en linje som ligger jämnt mellan punkterna på densamma. Ordet sträcka förekommer inte hos Euklides, han talar om en begränsad rät linje. Andra definitioner har matematisk innehåll, som används senare, t ex: en **cirkel** är en plan figur, som inneslutes av en linje, så att alla rätta linjer, som från en viss punkt i figuren faller på den, är lika stora. Sista definitionen är: **parallella** rätta linjer är rätta linjer som, om de utdrags i bägge riktningar, aldrig möts.

Efter definitionerna följer grundsatzerna, som indelas av Euklides i postulat, som är specifika för geometrin, och allmänna grundsatser. Det finns fem postulat:

1. Det fordras att man kan dra en rät linje från en punkt till en annan.
2. Att varje begränsad rät linje kan förlängas obegränsat.
3. Att man kring varje punkt kan beskriva en cirkel med given radie.
4. Att alla rätta vinklar är lika med varandra.
5. När en rät linje skär två rätta linjer, och de båda inre vinklarna på samma sida om den skärande rätta linjen är mindre än två rätta vinklar, så kommer de båda rätta linjerna, om de förlängas obegränsat, att skära varandra på den sida om den skärande rätta linjen som de två inre vinklarna ligger.

De allmänna grundsatzerna är:

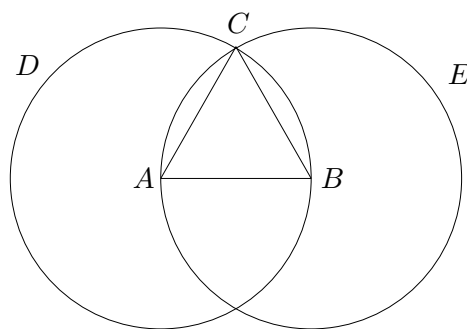
1. De, som är lika med ett och samma, är också lika med varandra.
2. Om lika adderas till lika, är de hela lika.
3. Om lika subtraheras från lika, är resterna lika.
4. De, som täcker varandra, är lika med varandra.
5. Det hela är större än delen.

Därefter utvecklar Euklides geometrin. Många kända resultat förekommer redan i den första boken: t ex, att vinkelsumman i en triangel är 180° (I.32) och Pythagoras sats (I.47). Men hela verket består av tretton böcker, varav det sista handlar om de fem regelbundna Platonska kroppar.

Stilen är en torr uppräknings av propositioner och bevis, utan vidare förklaringar. Bevisen grundas på postulaten, grundsatserna och tidigare bevisade propositioner. Som exempel ger vi första propositionen:

Proposition I.1. *Att på en given sträcka konstruera en liksidig triangel.*

Bevis. Låt AB vara den givna sträckan. Rita med medelpunkt A och radie AB cirkeln BCD genom B (postulat 3), tag sedan B till medelpunkt och BA till radie och rita cirkeln ACE (postulat 3). Från cirkelarnas skärningspunkt C dra linjerna CA och CB (postulat 1). Eftersom punkten A är medelpunkt till cirkeln CDB är AC lika stor som AB (cirkelns definition). Igen, eftersom punkten B är medelpunkt till cirkeln CAE är BC lika stor som BA (cirkelns definition). Således är CA och CB lika stora som en och samma sträcka AB , varav följer att CA är lika stor som CB (grundsats 1). Därför är de tre sträckorna CA , AB och BC lika stora. Alltså är triangeln ABC liksidig, och den har konstruerats på den givna sträckan AB .



QEF

3. Parallellpostulatet

Parallellpostulatet i Euklides fattning är krångligt, i motsats till övriga postulat, som innehåller enkla och självklara geometriska antaganden. Dessutom undviker Euklides så långt som möjligt (till I.29) att använda det. Det förvånar därför inte att försöken att bevisa axiomet är nästan så gamla som Euklides Elementa själva. I en svensk skolbok från 1800-talet (De sex första böckerna af Euclidis Elementa jämte planimetri och stereometri, utgifne av P.R. Brakenhielm, Örebro 1844) läser vi:

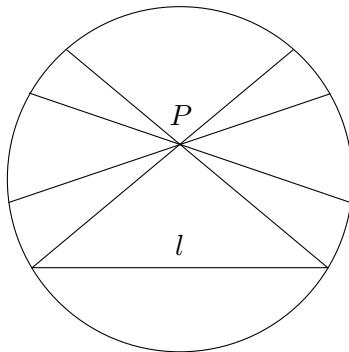
Detta axiom, som i sjelfva verket är en proposition, bevisas framdeles; då vi i stället antage, såsom af sig sjelft klart, att

Tvänne rätta lineer, som skära hvarandra kunna ej båda vara parallela med en och samma tredje linea.

Här antas explicit ett annat axiom, som i själva verket är ekvivalent med parallellaxiomet. Andra föreslagna ”bevis” visade sig innehålla implicita antaganden, som också är ekvivalenta med parallellaxiomet.

Det tog mer än 2000 år innan några matematiker (nästan samtidigt, och oberoende av varandra) fattade att alla försök missade målet, eftersom målet inte alls fanns. Det går att bygga en geometri (s k hyperbolisk geometri) på de första fyra postulaten, där det finns oändligt många paralleller till varje linje. Det tog lång tid innan detta förstods och accepterades, eftersom detta strider så uppenbarligen mot vår geometriska intuition. Den första upptäckaren var den stora tyska matematikern Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Just för att undvika alla negativa reaktioner av en omgivning, som inte var mogen för dessa kunskaper, publicerade han ingenting om detta. De två matematiker, som oberoende av varandra skrev om icke-euklidisk geometri, N.I. Lobatjevski (1793-1856) i Kazan i Ryssland, och den ungerska matematikern János Bolyai (1802-1860), fick i deras livstid ingen uppskattning för deras verk. Speciellt Bolyais öde är tragiskt. Fadern Farkas Bolyai kände Gauss från studietiden, och skickade honom János publikation. Gauss svarade: ”att berömma arbetet betyder att berömma mig själv”, eftersom han hade tänkt ut samma saker redan tidigare. János tog det mycket illa.

Det dröjde till 1860-talet innan bredare matematiska kretsar började uppmärksamma och förstå Lobatjevskis och Bolyais geniala prestationer. En viktig roll spelade att man kunde tolka den hyperboliska geometrin inom den vanliga euklidiska geometrin. Vi betraktar en cirkel med radie 1 i planet, och tar medelpunkten som origo. Bara punkterna innanför cirkeln tillhör det hyperboliska planet. Den delen av en euklidisk linje som ligger inom cirkeln, alltså en korda utan sina ändpunkter, är en hyperbolisk linje. Vad som skiljer sig är avståndet — den hyperboliska linjen skall vara oändligt lång. Vi ger inte den allmänna formeln, men nöjer oss med att den hyperboliska radien för en cirkel med medelpunkt origo och euklidisk radie r är $\frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$. Två sträckor är kongruenta om de är lika långa. Man kan visa att alla axiom gäller med undantag av parallellaxiomet. Figuren visar att det finns fler än en parallell genom en punkt. Alla linjer genom P mellan de två som skär l på randcirkeln (dvs utanför det hyperboliska planet) är parallella med l .



Upptäckten av de nya geometrierna har lett till en omvärdering av matematikens roll. Geometrin är inte en avbild av verkligheten, men tillhåller olika teorier, och för att beskriva verkligheten väljer man den som passar bäst. Dessa teorier byggs strängt logiskt upp, utan hänsyn till omvärlden. Man utgår från vissa primitiva begrepp. Alla relationer mellan begreppen regleras genom axiom. Vi får inte låta oss ledas av vara intuitiva föreställningar. Som Hilbert någon gång uttryckte det: Man måste alltid kunna säga "bord, stolar, ölsejdlar" i stället för "punkter, linjer, plan". Ett av Hilberts axiom lyder med dessa ord:

Av tre bord vid en stol står precis ett mellan de två andra.

Detta låter inte alls så självklart som

Av tre punkter på en linje ligger precis en mellan de två andra.

Men naturligtvis skall den axiomatiskt uppbyggda geometrin kunna användas för att beskriva omvärlden. Därför skall den överensstämma med vår intuition, som också ger ledtrådar vilka satser som kan vara sanna. Vi fortsätter alltså att tala om punkter, linjer och plan. Det skulle ta för lång tid att ge en konsekvent axiomatisk framställning, och därför utelämnar vi alla axiom, vilka som exemplet ovan handlar om relativa positioner, och ger bara de axiom som motsvarar Euklides postulat.

4. Axiom och primitiva begrepp

Vi utgår från de primitiva begreppen **punkt** (som vi betecknar med stora bokstäver) och **linje** (små bokstäver). Man sammanbinder punkter och linjer med begreppet incidens: om en punkt P är incident med en linje l , säger vi att P ligger på l , eller att l går genom P . En punkt P kan ligga mellan punkter A och B .

Axiom 1. *Genom två olika punkter går precis en linje.*

Sats 1. *Två olika linjer har högst en gemensam punkt.*

Bevis. Antag att de två olika punkterna A och B ligger på två olika linjer l och m . Enligt Axiom 1 finns det bara en linje genom A och B , så l och m sammanfaller och är inte olika linjer. $\square$

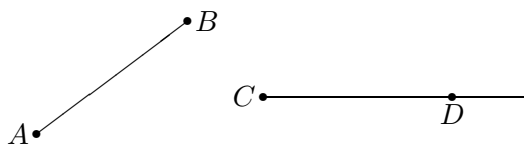
Om två linjer har en gemensam punkt kallas den för linjernas skärningspunkt. Två olika linjer är **parallella** om de inte skär varandra.

Låt A och B vara två punkter på en linje l . Mängden av alla punkter på l som ligger mellan A och B (inklusive A och B själva) kallas **sträckan** AB , och A och B är sträckans ändpunkter. Två sträckor är lika om de är samma mängd. Vi skiljer alltså inte mellan sträckorna AB

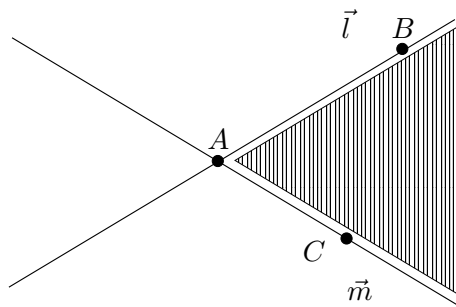
och BA . Mängden av alla punkter på l som ligger på samma sida om A (inklusive A) kallas en **stråle** från (eller med utgångspunkt i) A . Punkten A delar linjen i två motsatta strålar. Den som innehåller punkten B kallas strålen $\overrightarrow{AB}$. Om en tredje punkt C ligger på $\overrightarrow{AB}$, så är $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. Vi kan också skriva $\vec{l}$ om utgångspunkten och riktning framgår från texten. En korrekt beteckning för linjen genom A och B är $\overleftrightarrow{AB}$, men vi följer traditionen och talar om linjen AB . Att vi använder samma beteckning för en sträcka som för en linje kommer förhoppningsvis inte orsaka oklarheter.

Det finns en relation mellan sträckor som betecknas med ordet **kongruent**. Vi skriver $AB \cong CD$. Vi säger också att sträckorna är lika stora. Vi kommer att införa ett längdmått för sträckor, och sträckan AB 's längd betecknas som $|AB|$. Vi har då att $AB \cong CD$ om och endast om $|AB| = |CD|$. Detta visar att kongruens är en ekvivalensrelation (i själva verket ingår påståendet i de utelämnade axiomen).

Axiom 2. *Givet en sträcka AB och en stråle från en punkt C så finns det en unik punkt D på strålen sådan att sträckan CD är kongruent med sträckan AB .*



En **vinkel** definieras som ett par strålar med samma utgångspunkt. Strålarna kallas vinkelben, och utgångspunkten vinkelns spets. Låt alltså $\vec{l}$ och $\vec{m}$ vara två (ej motsatta) strålar med samma utgångspunkt. Strålen $\vec{l}$ ligger på linjen l , och $\vec{m}$ på m . Linjen l delar planet i två halvplan, och strålen $\vec{m}$ ligger i ett av dem; likadant ligger $\vec{l}$ i ett av de av m bestämda halvplanen. Alla punkter, som samtidigt ligger på samma sida om l som $\vec{m}$ och på samma sida om m som $\vec{l}$, bildar vinkelns **vinkelfält**.



Vi betecknar vinkeln med $\angle(\vec{l}, \vec{m})$, eller om strålarna är $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$, med $\angle BAC$. Om det inte kan uppstå missförstånd, skriver man ibland $\angle A$. Enligt vår definition är $\angle BAC = \angle CAB$.

Också vinklar kan vara kongruenta, med beteckning $\angle BAC \cong \angle A'B'C'$. Vi säger då att vinklarna är lika stora. Som mått på vinkelns storlek skall vi använda vanliga grader. T ex är storleken av en rät vinkel 90° . Vi skriver $(\angle A)^\circ$ för storleken av vinkeln $\angle A$.

Axiom 3. *Givet en vinkel $\angle BAC$ och en stråle $\overrightarrow{DE}$ så existerar det en unik stråle $\overrightarrow{DF}$ på en given sida om linjen DE sådan att $\angle EDF \cong \angle BAC$.*

Tre punkter A, B, C , som inte ligger på en och samma linje, bildar en **triangel**. De givna punkterna kallas triangelns hörn, och sträckorna mellan hörnen kallas triangelns sidor. Vi betecknar triangeln med $\triangle ABC$. Trianglar är kongruenta, om de har samma form och storlek, så att de täcker varandra, när den ena läggs på den andra. Att lägga en triangel på en annan använder Euklides i beviset för första kongruensfallet (I.4), men inte på andra ställen. Han gillar tydligen inte argumentet, men använder det i brist på bättre. I själva verket har vi här en grundläggande egenskap av det euklidiska rummet: ett föremåls form och storlek ändras inte om man förflyttar det. I många framställningar tas detta som axiom. I Euklides anda tillåter vi inte rörelse i geometri, men tar i stället helt enkelt propositionen som axiom.

Axiom 4. *Om i två trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ gäller att $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ och $\angle A \cong \angle A'$, så är också $BC \cong B'C'$, $\angle B \cong \angle B'$ och $\angle C \cong \angle C'$.*

Parallellaxiomet formuleras vanligtvis på följande sätt.

Axiom 5. *Genom en punkt utanför en given linje går precis en linje parallell med den givna.*

För att definiera längd behöver vi en godtycklig sträcka PQ som enhetsträcka. Vi får en längdskala om vi avtalar att kongruenta sträckor har samma längd och att om B ligger på sträckan AC , d v s B ligger mellan A och C , så är $|AB| + |BC| = |AC|$.

Axiom 6. (Fullständighetsaxiomet) *Låt AB vara enhetsträckan på en stråle $\overrightarrow{AB}$. Då är strålen i bijektion med de icke-negativa reella talen på sådant sätt att talet som motsvarar en punkt C är längden $|AC|$.*

Detta axiom saknas helt och hållet i Euklides, men att det behövs, syns på följande sätt. Vi kan införa kartesiska koordinater i planet. Vi uppfyller alla axiom utom fullständighetsaxiomet, om vi bara tillåter rationella tal som koordinater. Men då skär cirkeln i Euklides Proposition I.1 (se ovan) varandra inte: med A som origo och $|AB| = 2$ är C punkten med koordinater $(1, \sqrt{3})$.

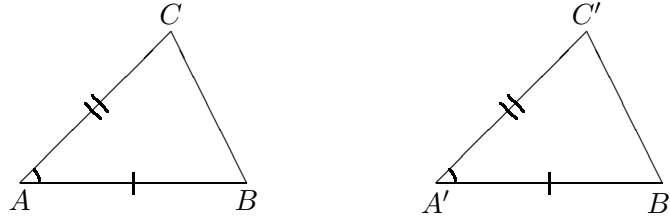
5. Kongruens av trianglar

Två trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ kallas kongruenta, om motsvarande sidor och vinklar är kongruenta:

$$\begin{aligned} |BC| &= |B'C'|, & |AC| &= |A'C'|, & |AB| &= |A'B'|, \\ \angle A &\cong \angle A', & \angle B &\cong \angle B', & \angle C &\cong \angle C'. \end{aligned}$$

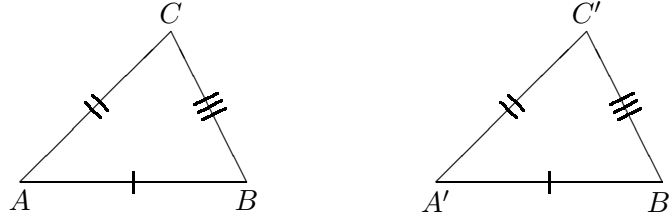
I beteckningen $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ingår att hörnet A motsvarar A' , B motsvarar B' och C motsvarar C' . Definitionen innehåller sex villkor, men det räcker med att tre av dem (i vissa kombinationer) är uppfyllda.

Sats 2 (Första kongruensfallet). *Trianglar, som överensstämmer i två sidor och mellanliggande vinkel, är kongruenta.*



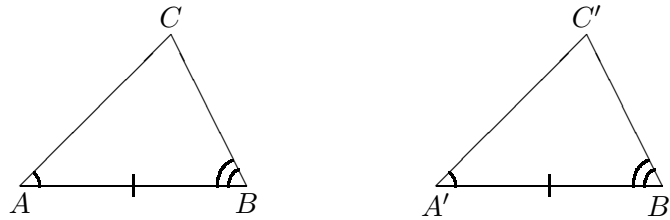
Om $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$ och $\angle A \cong \angle A'$, så är $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Sats 3 (Andra kongruensfallet). *Trianglar, som överensstämmer i alla tre sidorna, är kongruenta.*

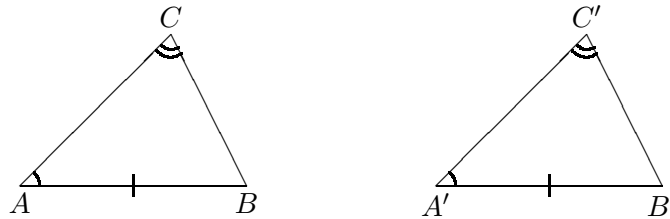


Om $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$ och $|BC| = |B'C'|$, så är $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Sats 4 (Tredje kongruensfallet). *Trianglar, som överensstämmer i två vinklar och en sida, är kongruenta.*



Om $|AB| = |A'B'|$, $\angle A \cong \angle A'$ och $\angle B \cong \angle B'$, så är $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

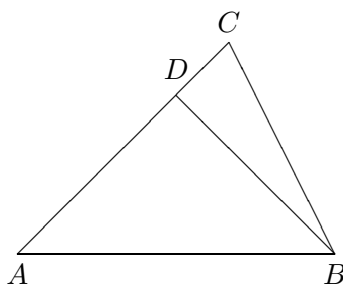


Om $|AB| = |A'B'|$, $\angle A \cong \angle A'$, och $\angle C \cong \angle C'$, så är $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

För att lättare komma ihåg kongruensfallen benämns de också efter villkoren. Det första är fallet 'SVS' (sida–vinkel–sida), det andra 'SSS' och det tredje 'VSV', respektive 'SVV'.

Det första kongruensfallet gäller enligt axiom 4. De övriga kan nu visas.

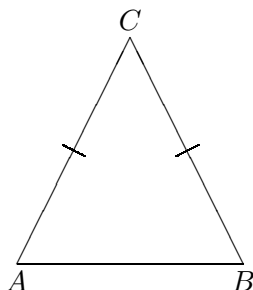
Bevis för tredje kongruensfallet. Antag först att $|AB| = |A'B'|$, $\angle A \cong \angle A'$ och $\angle B \cong \angle B'$. Vi vill visa att $|AC| = |A'C'|$; då är $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ enligt första kongruensfallet (Axiom 4). Vi gör ett motsägelsebevis. Antag att AC är längre än $A'C'$. Låt D vara punkten på AC sådan att $|AD| = |A'C'|$ (enligt Axiom 2).



Nu är $\triangle ABD \cong \triangle A'B'C'$ (SVS), så $\angle ABD \cong \angle A'B'C'$. Enligt antagande är $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$, som medför att $\angle ABD \cong \angle ABC$. Men enligt Axiom 3 finns det bara en stråle på C :s sida om linjen AB med den givna vinkeln, så $\overrightarrow{BD}$ och $\overrightarrow{BC}$ sammanfaller och punkten D är samma som punkten C , i motsats till antagandet att $|AC| > |A'C'| = |AD|$.

Fallet SVV bevisas lättast med en sats, som vi visar senare (utan att använda fallet SVV), att vinkelsumman i en triangel är 180° : om man känner två vinklar, så känner man också den tredje vinkeln. Då använder vi det just bevisade fallet VSV. Satsen om vinkelsumman beror på parallellaxiomet. Utan parallellaxiomet kan vi resonera på följande sätt. Sätt av AD som förut. Vi får nu $\angle ADB \cong \angle ACB$. Enligt en annan sats, som visas senare, om likbelägna vinklar, är nu linjerna DB och CB parallella, i motsats till att de båda går genom punkten B . Därför är punkten D är samma som punkten C . $\square$

En **likbent** triangel är en triangel med två lika långa sidor. Den tredje sidan kallas för **bas**, en beteckning som passar till följande sätt att rita en likbent triangel.



Sats 5 (Basvinkelsatsen). Om två sidor i en triangel är lika långa, så är motstående vinklar lika stora.

Bevis. Antag att $|AC| = |BC|$ i triangeln $\triangle ABC$. Då är triangeln $\triangle ABC$ kongruent med triangeln $\triangle BAC$, eftersom $|AC| = |BC|$, $\angle C = \angle C$ och $|BC| = |AC|$ (SVS). Detta ger att $\angle A \cong \angle B$. $\square$

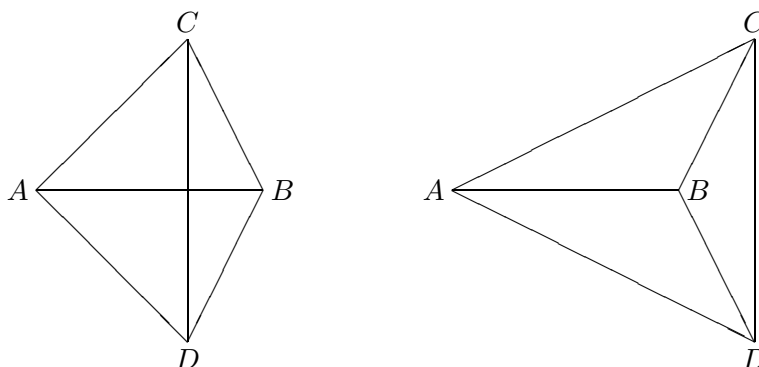
Som övning lämnas att visa omvändningen med hjälp av tredje kongruensfallet:

Sats 6. Om i en triangel två vinklar är lika stora, så är motstående sidor lika stora.

Av dessa satser följer att i en triangel gäller att alla sidor är lika långa om och endast om alla vinklar är lika stora. En sådan triangel kallas **liksidig**.

Bevis för andra kongruensfallet. Låt $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ ha lika stora sidor. Vi konstruerar med bas AB en triangel $\triangle ABD$ som är kongruent med $\triangle A'B'C'$. Vi sätter av vinkeln $\angle BAD \cong \angle B'A'C'$ på andra sidan om linjen AB mot punkten C (Axiom 3) och väljer på vinkelbenet punkten D med $|AD| = |A'C'|$ (Axiom 2). Då är enligt SVS (Axiom 4) $\triangle ABD \cong \triangle A'B'C'$. Vi drar linjen DC .

Det finns nu olika fall, beroende på existensen av en skärningspunkt för sträckorna AB och CD (se figur; fallet där CD går genom B är enkelt, och lämnas åt läsaren).



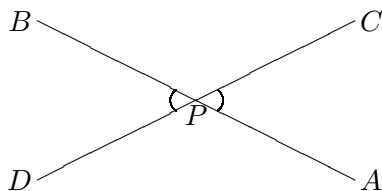
Triangeln $\triangle ACD$ är likbent, eftersom $|AC| = |A'C'| = |AD|$. Därför är $\angle ACD \cong \angle ADC$ (basvinkelsatsen). Även $\triangle BCD$ är likbent, eftersom $|BC| = |B'C'|$ och $|B'C'| = |BD|$ ($\triangle ABD \cong \triangle A'B'C'$). Så $\angle BCD \cong \angle BDC$. I den första figuren är vinkeln $\angle ACB$ summan av vinklarna $\angle ACD$ och $\angle BCD$, och vinkeln $\angle ADB$ summan av vinklarna $\angle ADC$ och $\angle BDC$, medan i den andra är vinklarna skillnaden. I båda fallen följer att $\angle ACB \cong \angle ADB$. Med första kongruensfallet får vi nu att $\triangle ABC \cong \triangle ABD \cong \triangle A'B'C'$. $\square$

Lägg märke till att SSV inte är ett kongruensfall.

6. Vinklar

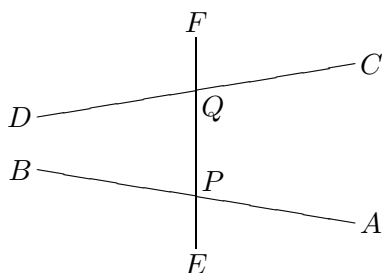
Om två linjer AB och CD skär varandra i en punkt P , uppstår fyra vinklar. Ett par av dessa som inte har något gemensamt vinkelben kallas **vertikalvinklar** eller **motsatta vinklar**.

I figuren är $\angle APC$ och $\angle DPB$ motsatta vinklar. Vinklar med gemensamt vinkelben, som $\angle APC$ och $\angle CPB$, är **sidovinklar**. Motsatta vinklar är lika stora eftersom de har gemensam sidovinkel.

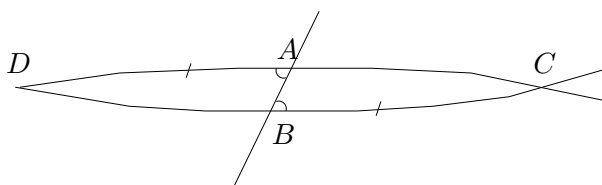


En vinkel som är kongruent med sin sidovinkel kallas **rät**. En vinkel som är mindre än rät kallas **spetsig**, och en som är större kallas **trubbig**.

En linje som skär två övriga linjer kallas en **transversal** till dessa. Två vinklar, en vid vardera av de två linjerna, kallas **likbelägna**, om de ligger på samma sida om transversalen, och på samma sida om respektive linje, i figuren t ex $\angle APF$ och $\angle CQF$. Den ena vinkeln ligger helt i den andras vinkelfält. Om vi ersätter en av vinklarna med dess motsatta vinkel får vi **alternativvinklar**. Två vinklar är alternativvinklar om deras vinkelfält är disjunkta, i figuren t ex $\angle APQ$ och $\angle PQD$.



Sats 7. Om två alternativvinklar är lika stora, så är linjerna parallella.



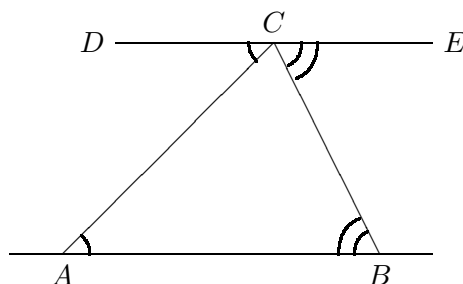
Bevis. Låt alternativvinklarna $\angle ABC$ och $\angle BAD$ vara lika stora, men antag att linjerna skär varandra i punkten C (se figur; vi skall visa att detta är omöjligt — det går inte att rita en figur utan att fuska). Sätt av punkten D på linjen AC på andra sidan om A mot C , sådan att $|AD| = |BC|$, och dra BD . Då är $\triangle ABC \cong \triangle BAD$, ty $|AD| = |BC|$, $\angle ABC \cong \angle BAD$ och sträckan AB är gemensam. Detta ger att $\angle BAC \cong \angle ABD$. Vinklarna $\angle ABC$ och $\angle ABD$ tillsammans är lika stora som $\angle BAD$ och $\angle BAC$ tillsammans, nämligen 180° . Detta betyder att D ligger på linjen BC . Genom D och C går alltså två olika linjer, vilket är omöjligt. Därför existerar inte någon skärningspunkt. $\square$

Sats 8. Om två parallella linjer skärs av en tredje linje, så är alternativvinklarna lika stora.

Bevis. Låt l och m vara parallella linjer och låt P vara m 's skärningspunkt med transversalen. Dra en linje m' genom P sådan att alternatvinklarna är lika. Enligt den föregående satsen är m' parallell med l . Enligt parallellaxiomet finns det bara en parallell genom P , så m och m' sammanfaller, och alternatvinklarna för l och m är lika stora. $\square$

Följdsats 9. *Two lines are parallel if and only if corresponding angles at intersection with a third line are equal.*

Sats 10. *Vinkelsumman i en triangel är 180° .*



Bevis. Dra en linje DE genom hörnet C parallell med basen AB i triangeln $\triangle ABC$. Alternatvinklarna $\angle ABC$ och $\angle BCE$ är lika stora, liksom alternatvinklarna $\angle BAC$ och $\angle ACD$. Vinkelsumman är därmed lika stor som summan av vinklarna $\angle DCA$, $\angle ACB$ och $\angle BCE$, som är 180° . $\square$

En **yttervinkel** till en triangel är en sidovinkel till en av de vinklarna i triangeln.

Följdsats 11 (Yttervinkelsatsen). *En yttervinkel till en triangel är lika med summan av de motstående innervinklarna.*

Bevis. Sidovinkeln vid B är lika stor som alternatvinkel $\angle BCD$, som är summan av $\angle C$ och $\angle A$. $\square$

7. Konstruktioner med passare och linjal

Mängden av alla punkter P , som har samma avstånd till en given punkt M , kallas för **cirkel**; M är **medelpunkten**, och varje sträcka MP är en **radie**. Man säger också radie för sträckans längd. Med **avståndet** mellan två punkter A och B menas längden av sträckan AB .

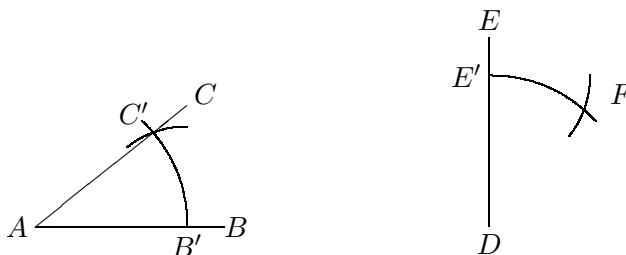
En cirkel med medelpunkt M och radie MP ritas med en passare. Att kunna göra detta är Euklides' tredje postulat, medan det första postulatet verkställas med en ograderad linjal. I

princip ska man använda en kollapsande passare, som slår ihop när den lämnar pappret, men man får samma konstruktioner som med en vanlig, styv passare, som behåller utslaget när den lyfts upp ur pappret. Den intresserade läsaren kan hitta beviset hos Euklides, Proposition I.2.

Vi tittar nu på några konstruktionsuppgifter. Man skall inte bara ange konstruktionen, men också visa att den verkligen löser problemet.

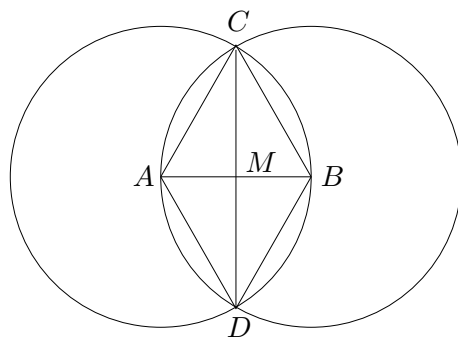
Problem 1. Givet en vinkel $\angle BAC$ och en stråle $\overrightarrow{DE}$, konstruera på en given sida av linjen DE en vinkel $\angle EDF$ som är kongruent med den givna vinkeln $\angle BAC$.

Konstruktion. Dra en cirkel om A , som skär strålen $\overrightarrow{AB}$ i B' och $\overrightarrow{AC}$ i C' . Dra en halvcirkel om D på den givna sidan av linjen DE med radien $|AB'|$ och låt E' vara skärningspunkten med strålen $\overrightarrow{DE}$. Bestäm nu skärningspunkten F av cirkeln om D med cirkeln med medelpunkt E' och radien $|B'C'|$. Dra strålen $\overrightarrow{DF}$.



Vinkeln EDF är den sökta vinkeln. Triangeln $\triangle AB'C'$ och $\triangle DE'F$ är likbenta med $|AB'| = |AC'| = |DE'| = |DF|$ enligt konstruktion. Vidare är $|B'C'| = |E'F|$, så $\triangle AB'C' \cong \triangle DE'F$ (SSS). Detta ger att $\angle BAC \cong \angle EDF$. $\square$

Problem 2. Att dela en sträcka mitt itu.



Konstruktion. Låt AB vara den givna sträckan. Dra cirkeln med medelpunkt A , radien AB och med medelpunkt B , radien BA . Dessa två cirkel skär varandra i punkterna C och

D (för att visa detta behövs axiom 6). Dra nu CD , som skär AB i punkten M . Triangelarna $\triangle ABC$ och $\triangle ABD$ är liksidiga. Triangelarna $\triangle BCD$ och $\triangle ACD$ är nu kongruenta enligt SSS. Därmed är $\angle BCD \cong \angle ACD$. Enligt SVS är $\triangle BCM \cong \triangle ACM$. Därför är M mittpunkten på AB . Vidare är vinkeln $\angle AMC$ kongruent med sidovinkeln $\angle BMC$, och därmed rät. Linjen MC är **mittpunktsnormal**. $\square$

Problem 3. Givet en linje l och en punkt P , konstruera en linje genom P som är vinkelrät mot l ; en sådan linje kallas **normal**.

Konstruktion Låt Q vara en punkt på andra sidan om l mot P . Dra cirkeln med medelpunkt P och radie PQ . Cirkeln skär l i två punkter A och B . Mittpunktsnormalen MP till AB , konstruerad som ovan, är den sökta linjen. $\square$

Med **avståndet mellan punkten P och linjen l** menas kortaste avstånd; det mäts längs normalen: avståndet är längden av sträckan MP , där M är skärningspunkten av l med normalen genom P .

8. Area

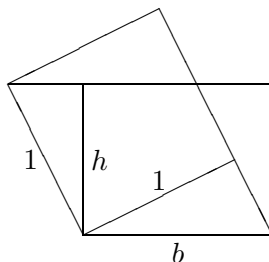
Varje månghörning M i planet har en area, som betecknas med $\mathcal{A}(M)$. Det är inte helt lätt att definiera arean, speciellt om man vill utvidga begreppet och kunna beräkna arean för mera komplicerade figurer, som cirkel och ellips. Vi bara skissar definitionen här. Vi börjar med ett rätvinkligt koordinatsystem, och betraktar koordinatgittret (där avståndet mellan linjerna är enhetslängden). Sen räknar vi antalet rutor som ligger helt inom figuren. Detta ger ett heltal, som inte överstiger arean. Vi får en övre uppskattning för arean, genom att räkna antalet rutor som behövs för att täcka figuren. Sen förfinar vi gittret genom att dela enhetssträckan i 10 delar. En enhetsruta delas upp i 100 mindre rutor. Vi räknar igen antalet rutor inom figuren, och delar det med 100. Vi fortsätter med att dela upp. I varje steg får vi två decimaler mer för den undre och övre uppskattningen. Om båda uppskattningarna ger samma tal, har vi hittat arean. Exemplet med cirkeln visar att man behöver oändligt många rutor, som blir mindre och mindre. Detta gäller för övrigt redan för en snedställd kvadrat.

Det är klart att följande gäller:

A1. Om vi delar upp en figur i mindre figurer, så är figurens area lika med summan av delfigurernas areor.

Det är mindre klart att vår definition är oberoende av valet av koordinatsystem. För tillämpningen på likformighet i nästa avsnittet behöver vi faktist inte veta detta. Definitionen ger att arean av en axelparallell rektangel med höjd h och bredd b är produktet hb . Vidare har kongruenta trianglar, vars motsvarande sidor är parallella, samma area. Vi betraktar nu en

kvadrat med sidolängd 1.



Som figuren visar får man en axelparallell rektangel genom att lägga till och ta bort lämpliga kongruenta trianglar med parallella sidor, alltså utan att ändra den totala arean. Trianglarna är likformiga rätvinkliga trianglar, enligt tredje likformighetsfallet i nästa avsnittet. Därmed är $1 : h = b : 1$, så arean av den axelparallella rektangeln, och därmed av kvadraten, är lika med $hb = 1$. Detta visar att vår definition är oberoende av koordinatsystemet. Nu följer också:

A2. *Kongruenta figurer har samma area.*

En **höjd** i en triangel är en normal genom ett hörn till motstående sida, eller dess förlängning (sidan kallas då för basen). Arean av en triangel är $\frac{1}{2}hb$, där h är (längden av) höjden och b (längden av) basen. För beviset hänvisas till övningarna.

9. Likformighet

Två trianglar är kongruenta om de har samma form och storlek. Om de bara har samma form, men inte nödvändigtvis samma storlek, kallas de för likformiga. Den exakta definitionen är: två trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ är **likformiga**, vilket betecknas med $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, om

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|},$$

$$\angle A \cong \angle A', \quad \angle B \cong \angle B', \quad \angle C \cong \angle C'.$$

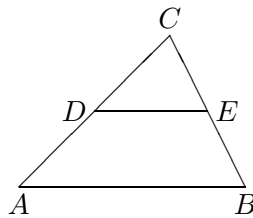
Förhållandet mellan sidorna kallas likformighetsskalan, eller längdskalan. Precis som för kongruens räcker det att vissa villkor är uppfyllda. Motsvarande de tre kongruensfallen har vi tre likformighetsfall:

Sats 12 (Första likformighetsfallet) (SVS). *Om två sidor i en triangel är proportionella mot två sidor i en annan triangel och mellanliggande vinklar är lika stora, så är trianglarna likformiga. Om $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$ och $\angle A \cong \angle A'$, så är $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.*

Sats 13 (Andra likformighetsfallet) (SSS). Om sidorna i en triangel är proportionella mot sidorna i en annan triangel, så är triangelarna likformiga. Om $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}$, så är $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

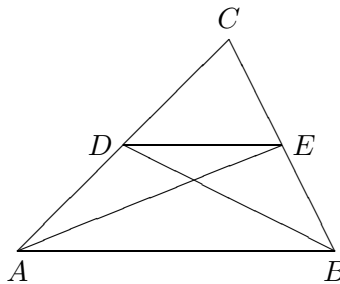
Sats 14 (Tredje likformighetsfallet) (VVV). Om två vinklar i en triangel är lika stora som motsvarande vinklar i en annan triangel, så är triangelarna likformiga. Om $\angle A \cong \angle A'$ och $\angle B \cong \angle B'$, så är $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

För att bevisa dessa skall vi först studera ett ofta förekommande fall av likformighet, som uppstår när en linje parallell med basen i en triangel skär av en **topptriangel**.



Sats 15 (Topptriangelsatsen). Varje topptriangel i en triangel $\triangle ABC$ är likformig med triangeln $\triangle ABC$.

Bevis. Låt $\triangle DEC$ vara en topptriangel i $\triangle ABC$. Eftersom likbelägna vinklar vid parallella linjer är lika stora, är motsvarande vinklar i de båda triangelarna kongruenta. Vi måste visa att vi har samma längdskala för alla tre paren av sidor.



Vi drar diagonalerna AE och BD . Triangelarna $\triangle ACE$ och $\triangle DCE$ har sidan CE gemensam, så de har samma höjd genom E mot baslinjen AC . Därför är förhållandet mellan areorna lika med förhållandet mellan baserna:

$$\frac{|AC|}{|DC|} = \frac{\mathcal{A}(\triangle ACE)}{\mathcal{A}(\triangle DCE)}.$$

På samma sätt är

$$\frac{|BC|}{|EC|} = \frac{\mathcal{A}(\triangle BCD)}{\mathcal{A}(\triangle ECD)},$$

eftersom triangelarna $\triangle BCD$ och $\triangle ECD$ har samma höjd genom D mot baslinjen BC . Triangelarna $\triangle ABE$ och $\triangle ABD$ har samma bas och samma höjd (avståndet mellan de parallella linjerna AB och DE), så de har samma area. Vi får $\triangle ACE$ genom att ta bort $\triangle ABE$ från den stora triangeln $\triangle ABC$, och $\triangle BCD$ genom att ta bort $\triangle ABD$ från $\triangle ABC$, så $\mathcal{A}(\triangle ACE) = \mathcal{A}(\triangle BCD)$. Därmed är

$$\frac{|AC|}{|DC|} = \frac{\mathcal{A}(\triangle ACE)}{\mathcal{A}(\triangle DCE)} = \frac{\mathcal{A}(\triangle BCD)}{\mathcal{A}(\triangle DCE)} = \frac{|BC|}{|EC|}.$$

Vi vill nu visa att detta förhållande är också lika med $|AB|/|DE|$. Det sista förhållandet är $\mathcal{A}(\triangle ABE)/\mathcal{A}(\triangle DEB)$ eftersom triangelarna $\triangle ABE$ och $\triangle DEB$ har samma höjd (avståndet mellan de parallella linjerna AB och DE). Vi betraktar nu båda triangelarna som trianglar med bas BE . Triangeln $\triangle CEA$ har sidan AE gemensam med $\triangle ABE$, så

$$\frac{|EB|}{|CE|} = \frac{\mathcal{A}(\triangle ABE)}{\mathcal{A}(\triangle CEA)}.$$

På samma sätt är

$$\frac{|EB|}{|CE|} = \frac{\mathcal{A}(\triangle DEB)}{\mathcal{A}(\triangle DEC)}.$$

Vi har genom att multiplicera och dela att

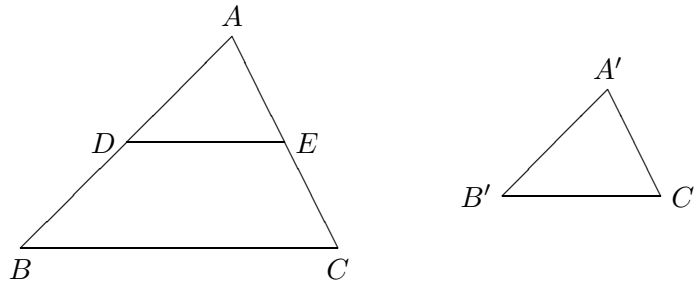
$$\frac{\mathcal{A}(\triangle ABE)}{\mathcal{A}(\triangle CEA)} = \frac{\mathcal{A}(\triangle DEB)}{\mathcal{A}(\triangle DEC)} \iff \frac{\mathcal{A}(\triangle ABE)}{\mathcal{A}(\triangle DEB)} = \frac{\mathcal{A}(\triangle CEA)}{\mathcal{A}(\triangle DEC)}.$$

Men det sista förhållandet känner vi till. Så

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{\mathcal{A}(\triangle ABE)}{\mathcal{A}(\triangle DEB)} = \frac{\mathcal{A}(\triangle CEA)}{\mathcal{A}(\triangle DEC)} = \frac{|AC|}{|DC|}.$$

□

Bevis för likformighetsfallen. Låt $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ vara givna, och antag att $|AB| > |A'B'|$. Vi väljer punkten D på AB så att $|AD| = |A'B'|$ och drar DE parallell med BC . Topptriangeln $\triangle ADE$ är nu likformig med $\triangle ABC$. För att visa att $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ räcker det nu att visa att $\triangle ADE$ är kongruent med $\triangle A'B'C'$.



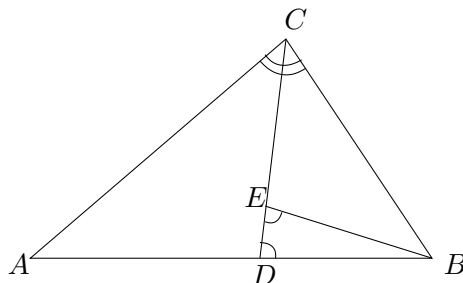
I fallet SVS vet vi att $|A'C'| = |A'B'| \cdot |AC|/|AB| = |AD| \cdot |AC|/|AB| = |AE|$, eftersom $|AD| = |A'B'|$ och $\triangle ADE \sim \triangle ABC$. Eftersom vinkeln $\angle A$ är gemensam, är triangelarna $\triangle ADE$ och $\triangle A'B'C'$ kongruenta.

I fallet SSS får vi med samma resonemang att motsvarande sidor i trianglarna $\triangle ADE$ och $\triangle A'B'C'$ är lika stora, och vi tillämpar andra kongruensfallet.

I fallet VVV har vi vinkeln $\angle A$ är gemensam, $|AD| = |A'B'|$ och $\angle ADE = \angle B = \angle B'$, så kongruens följer av tredje kongruensfallet. $\square$

Bisektrisen till en vinkel är den stråle som delar vinkeln mitt itu.

Sats 16 (Bisektrissatsen). *Bisektrisen till en vinkel i en triangel delar motstående sida i delar som är proportionella mot de övriga sidorna.*



Satsen säger att $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}$. Sidorna förekommer i trianglarna $\triangle ACD$ och $\triangle BCD$, som har samma toppvinkel. Men trianglarna är inte likformiga. Vi har här ett exempel att SSV inte är ett likformighetsfall.

Bevis. Låt CD vara bisektrisen. Antag att vinkel $\angle CDB$ är spetsig. Låt E vara punkten på CD sådan att $\triangle DBE$ är likbent. Då är $\angle DEB \cong \angle EDB$ och detsamma gäller för sidovinklarna: $\angle BEC \cong \angle ADC$. Då är $\triangle ACD \sim \triangle BCE$ och $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BE|} = \frac{|AD|}{|BD|}$. $\square$

10. Pythagoras sats

Redan minst 1000 år före Pythagoras var satsen känd, bl a i Babylonien. Men troligen var Pythagoras den förste som hittade ett bevis för formeln. Det finns många bevis för satsen och vi skall titta på några av dem.

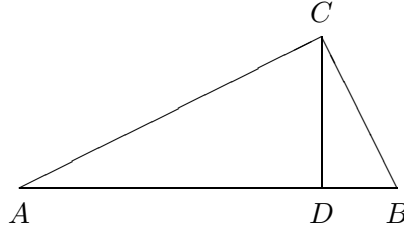
I en rätvinklig triangel kallas sidan som står mot den räta vinkeln för hypotenusan och de två övriga sidorna kallas kateterna.

Sats 17 (Pythagoras sats). *I en rätvinklig triangel är kvadraten på hypotenusan lika med summan av kvadraterna på kateterna.*

Låt $\triangle ABC$ vara en rätvinklig triangel. Om vi betecknar med c längden av sidan som står

mot den räta vinkeln $\angle C$, så $c = |AB|$, och om $a = |BC|$, $b = |AC|$, så blir satsens påstående $a^2 + b^2 = c^2$.

Bevis. Dra i triangeln $\triangle ABC$ höjden CD från C mot hypotenusan.



Triangelarna $\triangle ABC$ och $\triangle ACD$ är båda rätvinkliga och har vinkeln $\angle A$ gemensam. Enligt tredje likformighetsfallet (VVV) är nu $\triangle ABC \sim \triangle ACD$. Detta ger

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AC|}, \quad \text{så} \quad |AC|^2 = |AB||AD|.$$

På samma sätt får vi från $\triangle ABC \sim \triangle BCD$ att

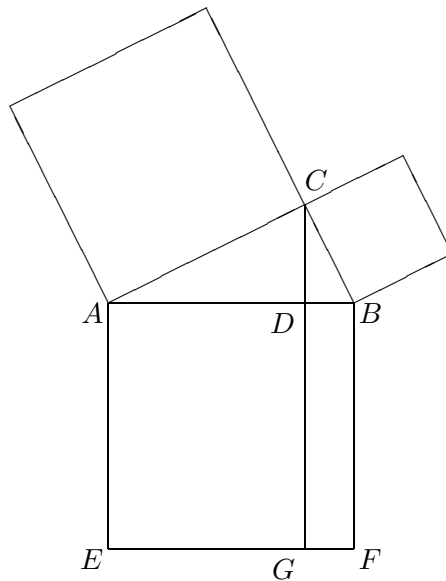
$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|BD|}{|BC|}, \quad \text{så} \quad |BC|^2 = |AB||BD|.$$

Eftersom $|AB| = |AD| + |BD|$ får vi genom addition

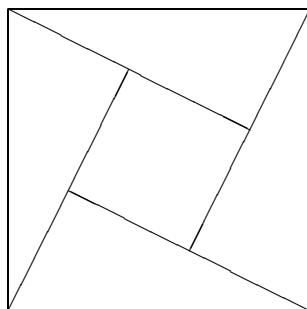
$$|BC|^2 + |AC|^2 = |AB||BD| + |AB||AD| = |AB|(|BD| + |AD|) = |AB|^2.$$

□

Detta bevis är kanske Pythagoras ursprungliga. Euklides ger ett annat bevis, som är svårt att förstå om man läser texten, men resonemanget är faktiskt mycket vackert. Figuren visar kvadraterna uppritade på kateterna, och på hypotenusan. Beviset går ut på att visa att rektangeln $ADGE$ har samma area som kvadraten på AC ; detta ger $|AC|^2 = |AB||AD|$. Från rektangeln $DBFG$ och kvadraten på BC får vi på samma sätt $|BC|^2 = |AB||BD|$. Själva beviset att areorna är lika passar bra för en datoranimation.



Nästa bevis kommer från Indien. Bhāskara (f 1105 e Kr) drar följande figur (liknande figurer förekom redan tidigare i Kina och Indien), och bara säger 'Se!', utan att ens göra beräkningen $c^2 = 4\frac{ab}{2} + (a-b)^2 = a^2 + b^2$.

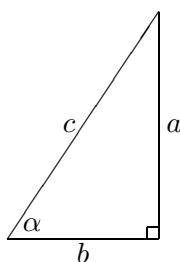


Det finns saker att fundera över. Till exempel, varför är hålet i mitten en kvadrat?

Omvändningen av Pythagoras sats gäller också: en triangel $\triangle ABC$ med sidorna a , b och c , där $a^2 + b^2 = c^2$, är rätvinklig. Låt nämligen $\triangle A'B'C'$ vara en rätvinklig triangel med kateter av längd a och b , då är enligt Pythagoras hypotenusans längd c och därför är $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (SSS), alltså är vinkeln $\angle C$ rät.

11. Sinus- och cosinussats

För en spetsig vinkel med storlek α definieras sinus och cosinus med hjälp av en rätvinklig triangel med vinkel α .



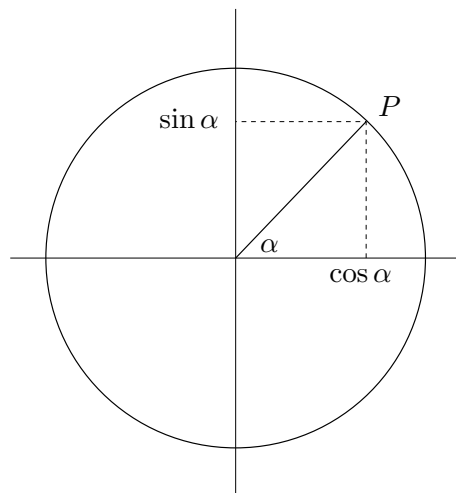
Sinus för en vinkel är kvoten av motstående sida och hypotenusan:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

Cosinus för en vinkel är kvoten av närliggande sida och hypotenusan:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

Låt P vara en punkt i första kvadranten på enhetscirkeln, så att vinkeln mellan strålen $\overrightarrow{OP}$ och den positiva x -axeln är α . Då är $(x, y) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ koordinaterna till P .



För en godtycklig vinkel α definierar vi nu $\cos \alpha$ och $\sin \alpha$ som x - och y -koordinat för den punkt P på enhetscirkeln, som ligger på strålen med vinkeln α , räknad från den positiva x -axeln. Då gäller $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ och $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. Observera att vi här egentligen betraktar ett annat vinkelbegrepp. Vi tillåter nu negativa vinklar, vinklar större än 180° och även större än 360° . Sådana vinklar kan tolkas som riktningsändring.

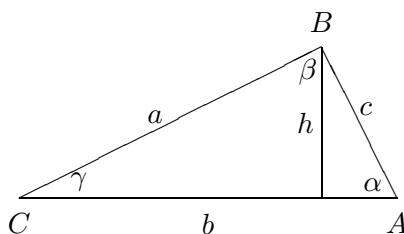
Vi kan nu generalisera Pythagoras sats för en godtycklig triangel.

Sats 18 (Cosinussatsen). *I en triangel med sidolängder a , b och c gäller*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

där γ är storleken på vinkeln, som står mot sidan c .

Bevis. Drag höjden mot sidan AC . Enligt Pythagoras är $a^2 = h^2 + (b - a \cos \gamma)^2$. Därmed får vi $c^2 = h^2 + (b - a \cos \gamma)^2 = h^2 + a^2 \cos^2 \gamma - 2ab \cos \gamma + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$. Fallen där triangeln har en trubbig vinkel, lämnas som övning. $\square$



Sats 19 (Sinussatsen). *I en triangel gäller*

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

Bevis. Vi betraktar samma figur som för cosinussatsen. Vi beräknar höjden h på två sätt och får den till $c \sin \alpha = a \sin \gamma$. Vi delar nu höger- och vänsterledet med ac . $\square$

Beräkningen av höjden i beviset ger oss en formel för triangelns area: $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$. Vi visar nu formel, som inte innehåller vinklar. Sätt $s = (a + b + c)/2$ (s står för semiperimeter, halva omkretsen).

Sats 20 (Hérons formel). *Arean för en triangel med sidolängder a , b och c är lika med*

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Bevis. Observera att $s - a = (a + b + c)/2 - a = (-a + b + c)/2$. Därmed får vi

$$\begin{aligned} 16s(s-a)(s-b)(s-c) &= (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = \\ &= ((a+b)+c)((a+b)-c)(c-(a-b))(c+(a-b)) = ((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2). \end{aligned}$$

Nu använder vi cosinussatsen och får $(a+b)^2 - c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma) = 2ab(1 + \cos \gamma)$ och $c^2 - (a-b)^2 = 2ab(1 - \cos \gamma)$. Så

$$16s(s-a)(s-b)(s-c) = 4a^2b^2(1 + \cos \gamma)(1 - \cos \gamma) = 4a^2b^2(1 - \cos^2 \gamma) = 4a^2b^2 \sin^2 \gamma.$$

Påståendet följer, eftersom triangelns area är $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$. $\square$

12. Mer om cirkeln

En linje skär en cirkel in högst två punkter. En linje som skär cirkeln bara i en punkt P kallas **tangent** i P .

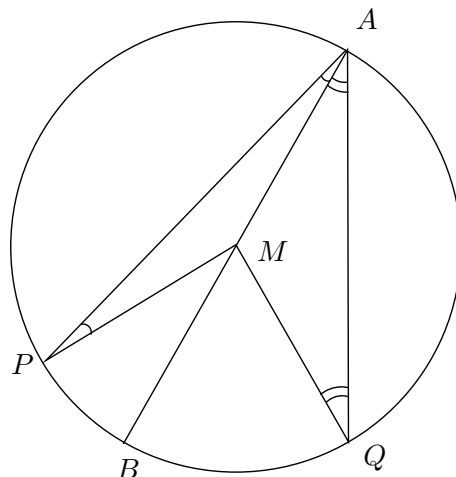
Sats 21. *En linje l är tangent till en cirkel i en punkt P om och endast l är vinkelrät mot radien genom P .*

Bevis. Antag att l är vinkelrät mot radien och att l skär cirkeln i ytterligare en punkt Q . Låt M vara cirkelns medelpunkt. Då är triangeln $\triangle PMQ$ likbent och är därför en triangel med två räta vinklar, som är omöjligt. Så det finns bara en skärningspunkt och linjen är en tangent.

Omvänt, antag att en tangent l i punkten P gör en vinkel mot radien som inte är rät. Låt MQ vara normalen mot l genom cirkelns medelpunkt M . Avsätt sträckan $QR \cong QP$ på l på andra sidan om Q mot P . Då är sidovinkeln $\angle MQR$ kongruent med $\angle MQP$, eftersom vinkeln är rät. Sidan MQ är gemensam, så $\triangle MQP \cong \triangle MQR$. Då är $MP = MR$ och R ligger på cirkeln, i motsats till att det bara finns en skärningspunkt. $\square$

Låt P och Q vara två ej diametrala punkter på en cirkel med medelpunkt M . Vinkeln $\angle PMQ$ i triangeln $\triangle PMQ$ kallas för medelpunktsvinkel på cirkelbågen PQ . Vinkeln $\angle PAQ$, där A är en godtycklig punkt på den andra cirkelbågen, kallas för periferivinkel.

Sats 22 (Periferivinkelsatsen). *Medelpunktsvinkeln är dubbelt så stor som en periferivinkel på samma båge.*



Bevis. Drag diametern AB . Triangelarna $\triangle PMA$ och $\triangle QMA$ är likbenta, så $\angle MPA \cong \angle MAP$ och $\angle MQA \cong \angle MAQ$. Yttervinkeln $\angle PMB$ är summan av basvinklarna i triangeln $\triangle PMA$, så $\angle PMB = 2 \cdot \angle PAM$. På samma sätt är $\angle QMB = 2 \cdot \angle QAM$. Addition av vinklar ger nu att $\angle PMQ = 2 \cdot \angle PAQ$. Om M inte ligger i vinkelfältet för $\angle PAQ$ får man resultatet på liknande sätt fast genom att subtrahera istället för addera. $\square$

Satsens omvändning gäller också: antag att en punkt A' ligger på samma sida om PQ som M och att vinkeln $\angle PA'Q$ är hälften av medelpunktsvinkeln $\angle PMQ$. Då måste A' ligga på cirkeln. Minst en av linjerna PA' , QA' skär cirkeln en gång till i samma halvplan. Låt A vara den andra skärningspunkten av PA' med cirkeln. Då är enligt periferivinkelsatsen $\angle PAQ$ halva medelpunktsvinkeln och därmed kongruent med $\angle PA'Q$. Då gäller $\triangle PAQ \cong \triangle PA'Q$ och A och A' sammanfaller, d v s A' ligger på cirkeln.

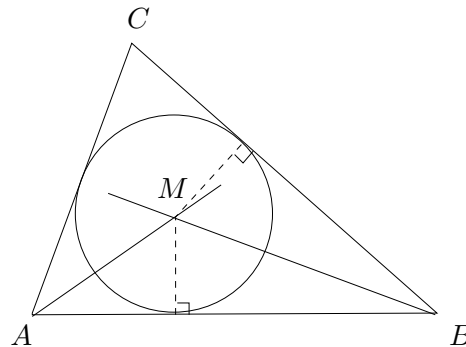
Enligt vår definition är en vinkel alltid mindre än 180° . Beviset för periferivinkelsatsen fungerar också om PQ är en diameter och även om A ligger på den större cirkelbågen (då uppfattas medelpunktsvinkeln som större än 180°). En periferivinkel är rät om och endast om den står på en halv cirkelbåge.

13. Speciella punkter i en triangel

Bisektisen till en vinkel är den linje eller stråle som delar vinkeln mitt itu. En punkt i vinkelns fält ligger på bisektisen om och endast om punkten har samma avstånd till båda vinkelbenen (att bevisa detta lämnas som uppgift). Avståndet mellan punkten P och linjen l betecknas som $d(P, l)$ och är längden av sträckan PQ , där Q är fotpunkt till normalen till l genom P .

Sats 23. *De tre bisektriserna i en triangel skär varandra i en punkt.*

Bevis. I triangeln $\triangle ABC$ dras bisektriserna till vinklarna $\angle A$ och $\angle B$. Låt M vara deras skärningspunkt. Att M ligger på vinkeln $\angle A$:s bisektris innebär att $d(M, AB) = d(M, AC)$. Eftersom M också ligger på $\angle B$:s bisektris gäller även att $d(M, BA) = d(M, BC)$. Men då är $d(M, CA) = d(M, CB)$ och därmed ligger M på $\angle C$:s bisektris. De tre bisektriserna skär varandra i M . $\square$

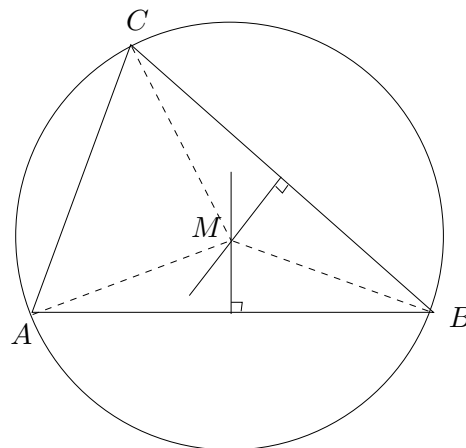


Bisektrisernas skärningspunkt är medelpunkten för den i triangeln inskrivna cirkeln.

Mittpunktsnormalen till en sträcka AB är normalen genom mittpunkten på AB . Som övning lämnas att visa att en punkt P ligger på mittpunktsnormalen till sträckan AB om och endast om P ligger på samma avstånd från A och B .

Sats 24. *De tre mittpunktsnormalerna i en triangel skär varandra i en punkt.*

Bevis. I triangeln $\triangle ABC$ dras mittpunktsnormalerna till sidorna AB och BC . Låt M vara deras skärningspunkt. Att M ligger på AB :s mittpunktsnormal innebär att $|MA| = |MB|$. Eftersom M också ligger på BC :s mittpunktsnormal gäller även att $|MB| = |MC|$. Men då är $|MA| = |MC|$ och därmed ligger M på AC :s mittpunktsnormal. De tre mittpunktsnormalerna skär varandra i M . $\square$

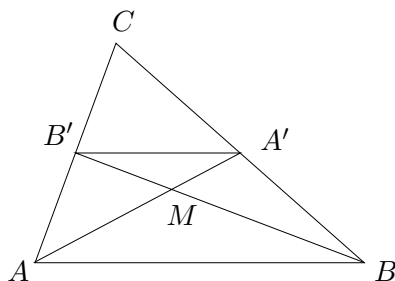


Mittpunktsnormalernas skärningspunkt är medelpunkten för den till triangeln omskrivna cirkeln.

En **median** i en triangel är en sträcka som sammanbinder ett hörn med mittpunkten på motstående sida.

Sats 25. *Medianerna till en triangel skär varandra i en punkt.*

Bevis. I triangeln $\triangle ABC$ dras medianerna AA' och BB' , som skär varandra i punkten M , samt linjen $B'A'$, som sammanbinder mittpunkterna A' på BC och B' på AC . Triangeln $\triangle ABC$ är likformig med $\triangle B'A'C$ enligt 1:a likformighetsfallet. Detta medför att $B'A'$ är parallell med AB och att $|AB| : |B'A'| = 2 : 1$.



Därför är alternatvinklarna $\angle A'AB$ och $\angle AA'B'$ lika stora, liksom alternatvinklarna $\angle ABB'$ och $\angle BB'A'$. Så $\triangle ABM \sim \triangle A'B'M$. Då gäller att $|AM| : |A'M| = |AB| : |A'B'| = 2 : 1$, d v s medianen genom B skär medianen AA' i punkten M som ligger på avståndet $\frac{1}{3}|AA'|$ från A' . På samma sätt visas att medianen genom C skär medianen AA' i samma punkt M på avståndet $\frac{1}{3}|AA'|$ från A' . De tre medianerna skär varandra i M . $\square$

Följdsats 26. *Medianerna delar varandra i förhållandet $2 : 1$.*

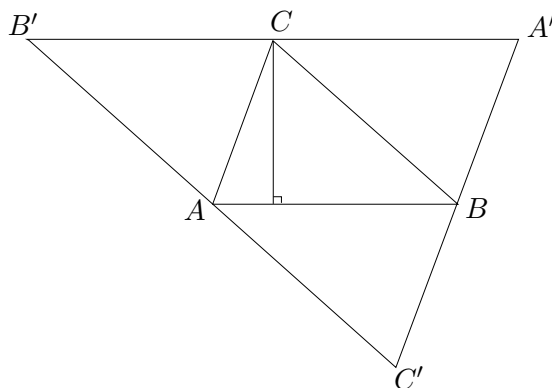
Medianernas skärningspunkt kallas triangelns **tyngdpunkt**. Tyngdpunkten är lika med triangelns tyngdpunkt i fysikalisk mening.

En **höjd** i en triangel är en normal från ett hörn till motstående sida eller dess förlängning (när ligger höjden utanför triangeln?).

Sats 27. *De tre höjderna i en triangel skär varandra i en punkt.*

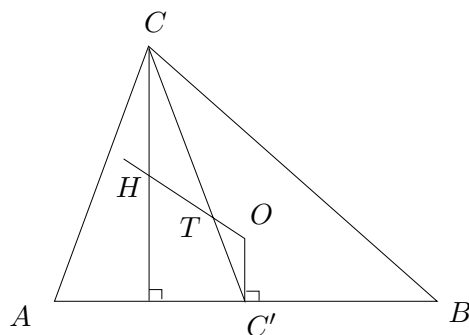
Bevis. Dra $B'A'$ parallell med AB genom C , $C'B'$ parallell med BC genom A och $A'C'$ parallell med CA genom B . Då är $\triangle ABC \cong \triangle A'CB$ eftersom $\angle ABC$ och $\angle BCA'$ är alternatvinklar, liksom $\angle ACB$ och $\angle CBA'$, och sträckan BC är gemensam. Likadant är $\triangle CB'A \cong \triangle ABC \cong \triangle BAC'$. Dra nu höjden från C . Den är vinkelrät mot $A'B'$, ty $A'B'$ är

parallell med AB . Eftersom $|B'C| = |AB| = |CA'|$ är höjden genom C också mittpunktsnormal på $B'A'$. Höjderna i $\triangle ABC$ är mittpunktsnormalerna i $\triangle A'B'C'$ och skär därför varandra i en punkt. $\square$



Konstruktionen av den inskrivna och omskrivna cirkeln finns redan hos Euklides, men höjder och medianer inte. Att höjderna skär varandra i en punkt visades först av Euler, liksom följande resultat.

Sats 28. *I en triangel ligger höjdernas skärningspunkt, tyngdpunkten och den omskrivna cirkelns medelpunkt på en linje (den s k Eulerlinje).*



Bevis. Dra i triangeln $\triangle ABC$ höjden mot AB och medianen CC' från C och mittpunktsnormalen på AB . Låt H vara skärningspunkten mellan höjden och linjen OT genom tyngdpunkten T och den omskrivna cirkelns medelpunkt O . Då är $\angle HCC' \cong \angle CC'O$ (alternatvinklar) och $\angle CTH \cong \angle C'TO$ (motsatta vinklar). Triangelarna $\triangle CTH$ och $\triangle C'TO$ är likformiga med $|HT| : |OT| = |CT| : |TC'| = 2 : 1$. Höjden från C går således genom en bestämd punkt (H) på linjen OT . De två andra höjderna går också genom H , som är därmed höjdernas skärningspunkt. (Detta visar igen att höjderna skär varandra i en punkt.) $\square$

DE SEX FÖRSTA

JEMTE

ELFTE OCH TOLFTE BÖCKERNA

AF

EUCLIDIS ELEMENTA

ELLER

GRUNDLIGA INLEDNING

TILL

GEOMETRIEN,

TILL SVENSKA UNGDOMENS TJENST-UTGIFNA

AF

MÅRTEN STRÖMER,

FÖR DELTA ASTRONOMIE PROFESSOR I UPPSALA SAMT LED. AF KONGL. VETENSK.-AKAD.
I STOCKHOLM OCH SOCIÉT. R. LIT. ET SCIENT. I UPPSALA.

FEMTONDE UPPLAGAN.

ÖFVERSÄTT SAMT MED TILLÄGG OCH FÖTTER BERÄNG. ANSEERÄLLANDE EN ALGEBRAISK
UTANDESLÄNING AF ANDRA OCH FEMTE BÖCKERNA,

AF

P. W. BERGSTRAND.



STOCKHOLM,
P. & G. BEIJERS FÖRLAG.

CHALMERS TEKNISKA HÖRSKOLA
MATEMATISKA INSTITUTIONEN

Till Läsaren.

I en stat äro många beställningar och handlingar, som fordra kunskap i Mathematiken, om de skola väl skötas. En stor del af Krigsvetenskapen i våra tider, Seglations-, Bergs- och Landtmätarevetenskaperna med flere grunda sig på mathematiska principer; och således måste de, som med embetens bestridande härvid hafva att beställa, vara i Mathematiken förfarne, om de skola grundligen förstå det, som till deras göromål hörer. Dessförutan äro också åtskilliga konster och handverk, som grunda sig på Mathematiken, för hvilken orsaks skull många, jemväl i sina enskilda förrättningar ej ringa fördel hafva, om de ega någon kunskap deruti. De, som vinnlägga sig om bokliga konster, fast deras ändamål icke är att tjena fäderneslandet i sådana beställningar, hvarest Mathematiken appliceras, hafva också en stor förmån, om de i yngre åren till någon del blifva dertill underviste; ty man finner näppeligen något tjenligare ämne att öfva förståndet på till att tänka redigt, det är, göra sig tydliga begrepp och af otvifvelaktiga grundsatser härleda ofelbara slut, och således att väl skilja det vissa ifrån det ovissa. Ty i mathematiska skrifter blifva alla saker så tydliga framställda och med så fullkomliga skäl beviste, att man om deras sanning ej kan draga något tvifvelsmål. Om derfore ett ungt snille i desse slags studier blifver afördt, hvarest ej andra än säkra slutsatser förekomma; så måste det nödvändigt derigenom förvärfa sig en färdighet att tänka redigt.

Minsta delen af dem, som hos oss hafva sådana förättningar, hvarest kunskap i Mathematiken är nödig, plägar vara förfaren i Latinet och andra främmande tungomål; och de unge studerande hafva sällan hunnit så vida, att de med lätthet kunna förstå böcker på främmande språk vid den tiden de böra göra en början med sina mathematiska studier. Och således blifva de förre alldeles i misstning af denna nödiga kunskap, och de senare komma icke i rättan tid dertill, så länge den i främmande språk för dem är undgängd.

Jag har derfore trott mig göra mina landsmän en tjenst, om jag på modersmålet utgäfve något, som kunde tjena till en fast



30. Utaf fyrstidiga figurer kallas den en **Quadrat**, uti hvilken alla fyra sidorna äro lika stora och alla vinklarna rätta.



31. Den en **Rektangel**, uti hvilken alla vinklarna äro rätta, men alla sidorna icke lika stora.



32. Den en **Rhomb**, uti hvilken alla sidorna äro lika stora, men vinklarna icke rätta.



33. Den en **Rhomboid**, uti hvilken allenast de sidorna och vinklarna, som stå midt emot hvarandra, äro lika stora.

34. Förutan dessa fyra kallas alla andra fyrstidiga figurer **Trapezier** *).

35. De rätta linier sägas vara **parallela** med hvarandra, som äro i samma plan och aldrig kunna råkas, om de oändligen utdragas.

Postulater.

1. Att ifrån hvad punkt man vill draga en rät linie till hvad punkt man vill.

Man brukar ofta kalla det: sammanbinda tvänne punkter. 2. Att utdraga en gifven rät linie ända rätt fram, så långt man behagar.

3. Att taga hvad punkt man vill till medelpunkt och rita en cirkel, hvars periferi går genom hvad punkt man vill.

Axiomer.

1. De, som äro lika stora med ett och samma [eller med lika stora], äro sines emellan lika stora.

2. Om man lägger lika stora till lika stora, så blifva de hela lika stora.

3. Om man tager lika stora ifrån lika stora, så äro de återstående lika stora.

4. Om man lägger lika stora till olika, så blifva de hela olika; *så att den summan, hvori den större är, blifver större än den, i hvilken den mindre är.*

*) [En figur, hvars alla sidor och vinklar äro lika stora, kallas *regulier* (regelbunden), hvarje annan figur *irregulier* (oregelbunden). Bland tresidiga figurer är endast *den liksidiga triangeln* och bland fyrstidiga endast *quadraten reguliera figurer*; de öfriga *irreguliera*.]

5. Om man tager lika stora ifrån olika, så äro de återstående olika: *så att det, som återstår efter den större, är större än det, som återstår af den mindre.*

6. De, som äro dubbelt så stora som ett och samma eller som lika stora, äro sines emellan lika stora.

Äfvenså äro de lika stora, som äro tre, fyra, fem och så vidare, gånger så stora som ett och samma eller som lika stora, eller med ett ord, lika mångfaldiga utaf ett och samma eller af dem, som äro lika stora.

7. De, som äro halfsporten så stora som ett och samma eller som lika stora, äro sines emellan lika stora.

Äfvenså äro de lika stora, som äro tredje-, fjerde-, femte- etc. parten af ett och samma eller af lika stora.

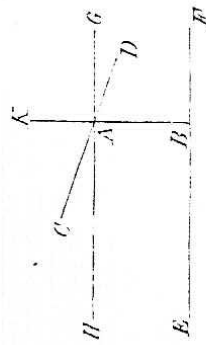
8. [*Congruentia*]. d. ä. de, som till alla delar träffa in med hvarandra, eller passa *tillhopa*, när *det ena lägges på det andra*, äro lika stora.

9. Det hela är större än hvar och en af sina delar.

10. Tvänne rätta linier kunna icke innesluta något rum eller *formera någon figur*.

11. Alla rätta vinklar äro lika stora.

12. Om en rät linie AB rårar tvänne andra rätta linier CD, EF, så att vinklarna DAB, ABF, som stå inantill på samma sida om hvarje, blifva tillsammans-



tagna, mindre än tvänne rätta vinklar, så skola dessa linier (CD, EF, om de oändligen utdragas, råkva hvarandra på den sidan om AB, som dessa vinklar stå, hvilka tillsammansstagna äro mindre än tvänne rätta.

Denna satsen tyckes näppeligen kunna medgifvas utan bevis. Det är ock troligt, att Euclides själf bevisat honom; men att demonstrationen dertill förkommit. Ivarom Clavius kan läsas, som berättar, att han funnit i ett arabiskt manuskript, näst efter den 28 propositionen i denna bok. Men som han icke själf sett detta manuskript, gifves deraf anledning till något tvifvelsmål, helst som han icke finnes i det arabiska manuskriptet, som är i Upsala bibliotek. Uti en del editioner finnes han ibland postulaterna; men utan bevis. Jag vill för citationernas skull icke göra någon ändring häruti, hvad ordningen vidkommer; skall dock längre fram, der han behöfves, bevisa honom, om jag får lof att i stället antaga ett annat axiom, som förmodligen utan svårighet medgifves och är följande:

Om en rät linie (J) rårar en, HG, af tvänne rätta parallela linier HG, EF, så måste hon ock råkva den andra EF, om de båda oändligen utdragas.

16. And the point is called the **centre** of the circle.
17. A **diameter** of the circle is any straight line drawn through the centre and terminated in both directions by the circumference of the circle, and such a straight line also bisects the circle.
18. A **semicircle** is the figure contained by the diameter and the circumference cut off by it. And the centre of the semicircle is the same as that of the circle.
19. **Rectilineal figures** are those which are contained by straight lines, **trilateral figures** being those contained by three, **quadrilateral** those contained by four, and **multilateral** those contained by more than four straight lines.
20. Of trilateral figures, an **equilateral triangle** is that which has its three sides equal, an **isosceles triangle** that which has two of its sides alone equal, and a **scalene triangle** that which has its three sides unequal.

21. Further, of trilateral figures, a **right-angled triangle** is that which has a right angle, an **obtuse-angled triangle** that which has an obtuse angle, and an **acute-angled triangle** that which has its three angles acute.

22. Of quadrilateral figures, a **square** is that which is both equilateral and right-angled; an **oblong** that which is right-angled but not equilateral; a **rhombus** that which is equilateral but not right-angled; and a **rhomboid** that which has its opposite sides and angles equal to one another but is neither equilateral nor right-angled. And let quadrilaterals other than these be called **trapezia**.

23. **Parallel** straight lines are straight lines which, being in the same plane and being produced indefinitely in both directions, do not meet one another in either direction.

POSTULATES.

Let the following be postulated:

1. To draw a straight line from any point to any point.
2. To produce a finite straight line continuously in a straight line.
3. To describe a circle with any centre and distance.
4. That all right angles are equal to one another.

From: The Thirteen Books of Euclid's Elements, translated by Sir T. L. Heath

5. That, if a straight line falling on two straight lines make the interior angles on the same side less than two right angles, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which are the angles less than the two right angles.

COMMON NOTIONS.

1. Things which are equal to the same thing are also equal to one another.
2. If equals be added to equals, the wholes are equal.
3. If equals be subtracted from equals, the remainders are equal.
- [7] 4. Things which coincide with one another are equal to one another.
- [8] 5. The whole is greater than the part.

DEFINITION I.

Σημείον ἔστιν, ὃ μέγος οὐδέν.

A point is that which has no part.

An exactly parallel use of μέγος (ἐστίν) in the singular is found in Aristotle, *Metaph.* 1035 b 32 μέγος μὲν οὖν ἐστὶ καὶ τὸ εἶδος, literally "There is a part even of the form"; Bonitz translates as if the plural were used, "Theile giebt es," and the meaning is simply "even the form is divisible (into parts)." Accordingly it would be quite justifiable to translate in this case "A point is that which is indivisible into parts."

Martianus Capella (5th c. A.D.) alone or almost alone translated differently, "Punctum est cuius pars nihil est," "a point is that a part of which is nothing." Notwithstanding that Max Simon (*Euclid und die sechs planimetrischen Bücher*, 1901) has adopted this translation (on grounds which I shall presently mention), I cannot think that it gives any sense. If a part of a point is nothing, Euclid might as well have said that a point is itself "nothing," which of course he does not do.

Pre-Euclidean definitions.

It would appear that this was not the definition given in earlier textbooks; for Aristotle (*Topics* VI. 4, 141 b 20), in speaking of "the definitions" of point, line, and surface, says that they all define the prior by means of the posterior, a point as an extremity of a line, a line of a surface, and a surface of a solid.

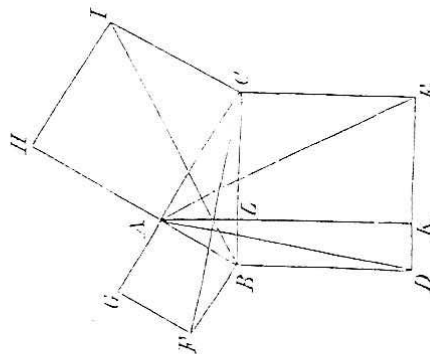
The first definition of a point of which we hear is that given by the Pythagoreans (cf. Proclus, p. 95, 21), who defined it as a "monad having position" or "with position added" (μονὰς προσλαβούσα θέσις). It is frequently used by Aristotle, either in this exact form (cf. *De anima* I. 4, 409 a 6) or its equivalent: e.g. in *Metaph.* 1016 b 24 he says that that which is indivisible every way in respect of magnitude and *quâ* magnitude but has not position is a *monad*, while that which is similarly indivisible and has position is a *point*. Plato appears to have objected to this definition. Aristotle says (*Metaph.*

att hon är liksidig; därför är hon en kvadrat; hon är också upprättad på den gilla rätta linien AB. II. S. G.

Coroll. Häraf ser man, att om en vinkel i en parallelogram är rät, så äro alla vinklarna rita och således parallelogrammen rätvinklig.

XLVII. Proposition. Theorem.

*I rätvinkliga triangler är kvadraten, som upprättas på den sidan, som står emot den rätta vinkeln **), lika stor med kvadraten, som upprättas på sidorna, som omfatta den rätta vinkeln **), till-sammanslagne ***).*



Låt ABC vara en rätvinklig triangel, hvars vinkel BAC är rät; så säger jag, att kvadraten, som upprättas på BC, är lika stor med båda kvadraterna tillhopa, som upprättas på BA och AC.

Ty upprita på BC kvadraten BDEC, och på BA, AC kvadraterna GB, HC (a); och drag genom punkten A, AK parallell med BD eller CE (b), och sammanbind AD, FC.

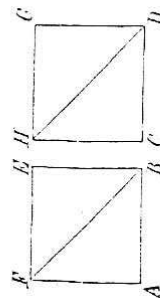
Fördenskull, efter vinklarna BAC, BAG äro rätta (c), så räkna tvänne rätta linier GA, AC rätta linien BA på hvar sin sida uti hvarandra, äro tillhopa lika stora med tvänne rätta. Därföre äro GA och AC i en rät linie (d). För samma orsaks skull äro AB och AH uti en rät linie. Och efter vinkeln DBC är lika stor med vinkeln FBA, ty hvardera är en rät vinkel (e); så lägg ABC, som är gemensam, till dem båda, så blifver hela vinkeln DBA lika stor med vinkeln FBC (f). Nu är också AB lika stor med BF, ty de äro sidor i samma kvadrat ABFG, och BD lika stor med BC, efter de äro sidor i kvadraten BDEC. Alltså äro två sidor AB, BD i triangeln ABD lika stora med

*) [Denna sida kallas *hypotenusan*.] **) [Hvar och en af dessa sidor kallas en *kathet*.] ***) [Denna viktiga proposition kallas *det pythagoriska theoremet* efter sin upptäffare, filosofen Pythagoras. som lefde omkring 550 år före Kristus. Han skall äfven hafva upptäckt den viktiga propositionen XXXII.]

hvar sin af sidorna FB, BC i triangeln FBC, och vinkeln DBA är lika stor med vinkeln FBC; därför måste basen AD vara lika stor med basen FC och triangeln ABD lika stor med triangeln FBC (g). Men parallelogrammen BK är dubbelt så stor som triangeln ABD; ty de stå på samma bas BD och äro emellan samma parallela linier BD, AK (h). Kvadraten GB är också dubbelt så stor som triangeln FBC; ty de stå på samma bas FB och äro emellan samma parallela linier FB, GC (i). Men de, som äro dubbelt så stora som lika stora, äro lika stora med hvarandra (j). Därföre är parallelogrammen BK lika stor med kvadraten GB. På samma sätt bevisas, att parallelogrammen CK är lika stor med kvadraten CH, om man drager rätta linier AE, BE. Därföre är hela kvadraten DBEC lika stor med kvadraterna GB, HC tillhopa (f). Men kvadraten BDEC är upprättad på rätta linien BC, och kvadraterna GB, HC äro upprättade på BA, AC; därför är kvadraterna, som äro upprättade på sidorna BA, AC, II. S. B.

Theorem.

De kvadrater, som hafva lika stora sidor, äro lika stora.



Låt kvadraterna AE, CG hafva lika stora sidor AB, CD; så säger jag, att AE och CG äro lika stora. Ty sammanbind FB, HD.

Fördenskull, efter AE är en kvadrat, så måste sidan AB vara lika stor med sidan AF, och efter CG är en kvadrat, så måste sidan CD vara lika stor med sidan CH (a). Men a. 30. delin. CD poneras lika stor med AB; därför är AF lika stor med CH (b). Alltså äro två sidor FA, AB i triangeln FAB lika stora med hvar sin af c. 4. propos. sidorna HC, CD i triangeln HCD. Men vinkeln vid A är också lika stor med vinkeln vid C, efter de båda äro rätta (a); därför är basen FB lika stor med basen HD, och triangeln FAB lika stor med triangeln HCD (c). Men nu är kvadraten AE dubbelt så stor som triangeln FAB, och kvadraten CG dubbelt så stor som triangeln HCD (d); därför, efter de, som äro dubbelt så stora som lika stora, äro lika stora med hvarandra (e), så måste kvadraten AE vara lika stor med kvadraten CG. II. S. B.

Therefore AG , CF are parallel.
Also, since each of the alternate angles AFG , FGC is half a right angle,
 AF , CG are parallel.
Hence $AFCG$ is a parallelogram; and AF , CG are equal.
Thus the triangles ABF , CBG have two angles and one side respectively
equal;
therefore AB is equal to BC , and BF to BG .

PROPOSITION 47.

*In right-angled triangles the square on the side subtending
the right angle is equal to the squares on the sides containing
the right angle.*

Let ABC be a right-angled triangle having the angle
5 BAC right;

I say that the square on BC is equal to the squares on
 BA , AC .

For let there be described
on BC the square $BDEC$,
10 and on BA , AC the squares
 GB , HC ; [i. 46]
through A let AL be drawn
parallel to either BD or CE ,
and let AD , FC be joined.

15 Then, since each of the
angles BAC , BAG is right,
it follows that with a straight
line BA , and at the point A
on it, the two straight lines
20 AC , AG not lying on the
same side make the adjacent
angles equal to two right
angles;

therefore CA is in a straight line with AG . [i. 14]

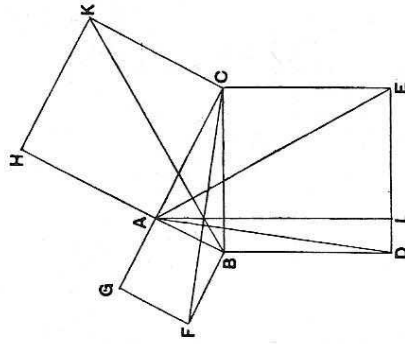
25 For the same reason

BA is also in a straight line with AH .

And, since the angle DBC is equal to the angle FBA : for
each is right:

let the angle ABC be added to each;

30 therefore the whole angle DBA is equal to the whole
angle FBC . [C. N. 2]



And, since DB is equal to BC , and FB to BA ,
the two sides AB , BD are equal to the two sides FB , BC
respectively,

35 and the angle ABD is equal to the angle FBC ;

therefore the base AD is equal to the base FC ,

and the triangle ABD is equal to the triangle FBC . [i. 4]

Now the parallelogram BL is double of the triangle ABD ,
for they have the same base BD and are in the same parallels
40 BD , AL .

And the square GB is double of the triangle FBC ,
for they again have the same base FB and are in the same
parallels FB , GC .

[But the doubles of equals are equal to one another.] [i. 41]
45 Therefore the parallelogram BL is also equal to the
square GB .

Similarly, if AE , BK be joined,
the parallelogram CL can also be proved equal to the square
 HC ;

50 therefore the whole square $BDEC$ is equal to the two
squares GB , HC .

And the square $BDEC$ is described on BC ,
and the squares GB , HC on BA , AC .

Therefore the square on the side BC is equal to the
55 squares on the sides BA , AC .
Therefore etc.

Q. E. D.

1. the square on, τὸ ἀπὸ... τετραγώνου, the word ἀναγρᾶσθαι or ἀναγεγραμμένον being understood.
subtending the right angle. Here ὑποκείμενον, "subtending," is used with the simple accusative (τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ) instead of being followed by τῷ and the accusative, which seems to be the original and more orthodox construction. Cf. i. 18, note.

33. the two sides AB , BD ... Euclid actually writes " DB , BA ," and therefore the equal sides in the two triangles are not mentioned in corresponding order, though he adheres to the words $ἐκάρηα ἐκάρηα$ "respectively." Here DB is equal to BC and BA to FB .

44. [But the doubles of equals are equal to one another.] Heiberg brackets these words as an interpolation, since it quotes a *Common Notion* which is itself interpolated. Cf. notes on i. 37, p. 332, and on interpolated *Common Notions*, pp. 223-4.

"If we listen," says Proclus (p. 426, 6 sqq.), "to those who wish to recount ancient history, we may find some of them referring this theorem to Pythagoras and saying that he sacrificed an ox in honour of his discovery. But for my part, while I admire those who first observed the truth of this theorem, I marvel more at the writer of the *Elements*, not only because he made it fast ($\kappaατέθηκε$) by a most lucid demonstration, but because he compelled assent to the still more general theorem by the irrefragable arguments of science in the sixth Book. For in that Book he proves generally that, in right-angled triangles, the figure on the side subtending the right angle is equal to the similar and similarly situated figures described on the sides about the right angle."

- *Reduce visual clutter and—what is not quite the same thing—eliminate distraction.* Put in only what the diagram really needs to make its point. Tone down components that just add context.
- *Highlight components that are central to the current discussion.* If necessary, repeat a diagram several times, but with different components emphasized. This is a variant of what Tufte calls *small multiples*.
- *The figures themselves should tell a story.* Coordination between text and illustration is surprisingly tricky, and ideally the two should be as independent of each other as possible. Movies handle this problem with audio, but that approach is not an easy option yet for mathematics, nor is it easy to think about how to deal with it even if it were. Most of us are still restricted to making silent films.
- *It is rare for there to be too many illustrations in a mathematics paper.* Keep in mind that illustrations can serve a number of distinct purposes—for example, I find that I can often tell better what a paper with plentiful illustrations is about by skimming diagrams rather than by reading text. Pictures can often be read rapidly, and adding more should always be taken as a serious option.
- *In drawing figures, think out how the material would be presented in spoken discourse.* Draw pictures that follow the same narrative, even if this means a fair amount of repetition. Computers can help in dealing with this sort of repetition.
- *Ask constantly whether the figures really convey the point they are meant to.* Redo them if necessary. Figures should be redrawn, as text is rewritten, until they are right.
- *Use imagination.* Sometimes very small and subtle changes in a figure will have an enormous impact. Experimenting will help.
- *Do not depend often on pictures to make a point.* People's interpretations of figures vary unpredictably, as indeed thousands of psychological experiments show. Always try out a figure on a number of people just to see how it goes over.

Let me try to explain a few of these points with an elementary example. It might be objected that it is too elementary to be of much use, but I find that it is unusual enough to generate heated discussion, even with rather sophisticated mathematicians.

The traditional figure for Pythagoras's Theorem from Euclid is Figure 4. It matches perfectly with the text in Euclid, and it or some slight variant is still used frequently in explaining Euclid's proof of Pythagoras's Theorem. It is less frequently admired. I think it is fair to say that the traditional

way in which Euclid's proof is presented and the figure that accompanies it disguise its charms.

As I suggested earlier by the remarks about coordination of pictures and text, the scheme that Euclid himself uses is rarely the best way to explain his proofs, except for historical purposes. In a course incorporating both computer graphics and geometry that I give frequently to third-year university students, I usually start off with a discussion of shears, particularly about how they preserve area. Superficially simple as this topic is, it can lead to many graphical images and can also lead to very subtle points about Euclid's concept of area and Hilbert's improvements of Euclid's logical structure. Then follows a sequence of figures again suggesting animation (Figure 5). It is measurably much better than following Euclid, in the sense that as far as I can tell no student has ever forgotten it, once explained. Here is certainly a place where a computer made it very simple to make redundant calculations trivial and where the difficulty of making repetitions by hand would have been inhibitive.

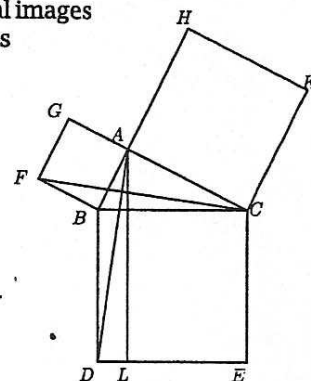


Figure 4. Traditional picture for proving Pythagoras's Theorem.

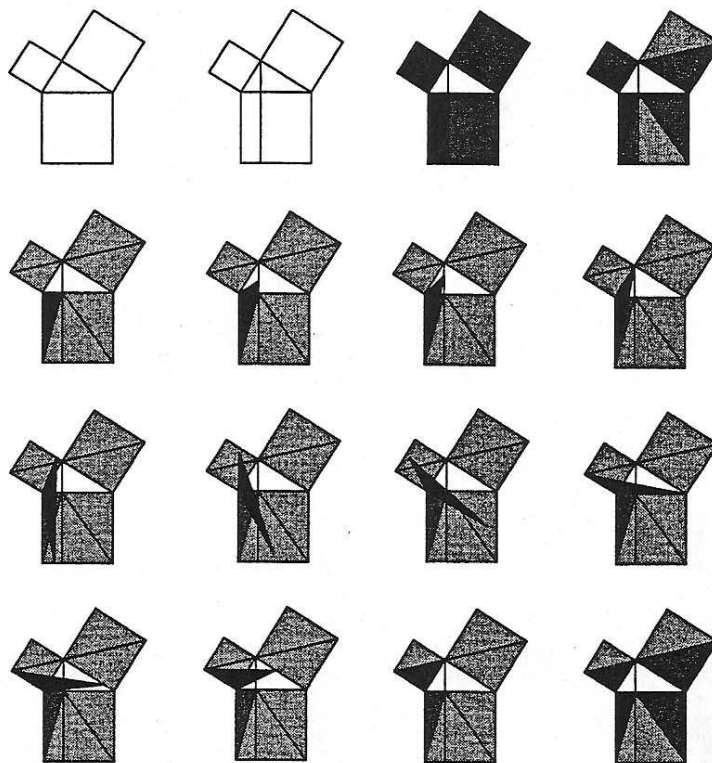


Figure 5. Animation for proving Pythagoras's Theorem.