Ändligt och oändligt

Ett barn som håller på att lära sig räkna, 1, 2, 3, 4, osv. undrar hur långt man kan räkna. Vad skall vi svara på det? Hur många är talen $1, 2, 3, 4, \ldots$?

Ett svar är att man kan räkna hur långt som helst och att talen $1, 2, 3, 4, \ldots$ är oändligt många. Här skall vi försöka precisera vad man skall mena med detta. Vi börjar med att analysera vad som menas med att två (ändliga) mängder har lika många element.

Exempel 1.

En modern fåraherde som vill hålla koll på att alla fåren som släpps ut på bete kommer hem vi dagens slut räknar helt enkelt dem vid de två tillfällena och ser att antalet stämmer. En icke räknekunnig fåraherde måste göra på ett annorlunda sätt, han kan bilda en hög med stenar genom att för varje får han släpper ut på morgonen lägga en sten i stenhögen. När fåren återvänder på kvällen tar han bort en sten för varje får och om ingen sten blir kvar i högen vet han att alla fåren har återvänt. □

Vi skall använda den sista metoden i exemplet för att *definera* vad som menas med att två mängder har lika många element.

Definition.

Två mängder A och B har lika många element om deras element kan paras ihop. □

Vi skall inte ge en exakt definition av ”para ihop” utan nöjer oss med en intuitiv uppfattning av vad det betyder och illustrerar det med några exempel. Begreppet "para ihop" kan om man känner till funktionsbegreppet, preciseras genom att kräva att det skall finnas en bijektion mellan A och B.

Exempel 2.

Mängderna $A = \{3, 7, 9\}$ och $B = \{2, 13, 7\}$ har lika många element. Vi kan helt enkelt räkna antalet tal i de två mängderna–båda har tre element.

Men vi kan också para ihop dem som t.ex. i figuren

$$\begin{array}{ccc} 3 & 7 & 9 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 2 & 13 & 7 \end{array}$$

$\square$

Ett annat sätt att beskriva hopparningen är att ange de tre paren $(3, 2)$, $(7, 13)$ och $(9, 7)$. $\square$

Exempel 3.

För att se att vi (de flesta av oss) har lika många fingrar på vänster hand som på höger kan vi para ihop dem genom att hålla fingertopparna på de olika händerna emot varandra, vi behöver inte räkna ut (veta) att de är fem. $\square$

När man använder definitionen "lika många" på oändliga mängder kan man få överraskande resultat.

Exempel 4. (Hilberts hotell.)

Ett hotell har ett rum för varje naturligt tal $1, 2, 3, 4, \ldots$. Alla rum är uthyrda. Sent på kvällen kommer ännu en gäst till hotellet. Portiern tycker det är synd att behöva avvisa gästen och kommer efter en tids funderande på en lösning. Han uppmanar alla gästerna att byta rum, de skall flytta från rummet de bor i till rummet med rumsnumer ett mer än vad de hade. Sedan ger portiern den nya gästen Rum 1. $\square$

Exempel 5.

De naturliga talen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

är lika många som de udda talen

$$\mathbb{U} = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}\ .$$

En naturlig hopparning får vi genom att para ihop dem i den ordning de kommer

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \ldots \end{array}$$

$\square$

Det sista exemplet strider kanske mot vår naiva intuition om vad ”lika många” betyder. Trots att $\mathbb{U}$ är en äkta delmängd till $\mathbb{N}$ (alla talen i $\mathbb{U}$ ligger i $\mathbb{N}$ och det finns tal t.ex. 2 som ligger i $\mathbb{N}$ men inte i $\mathbb{U}$) så har $\mathbb{U}$ och $\mathbb{N}$ lika många element. Något sådant kan inte hända för ändliga mängder.

Denna underlighet ligger bakom den definition som Richard Dedekind gav av ändlig mängd år 1888.

Definition.

En mängd M är *ändlig* om den inte har någon äkta delmängd som har lika många element som M.

En mängd som inte är ändlig kallas *oändlig.*

$\square$

Sats.

De naturliga talen $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ är oändligt många.

Bevis. De udda talen $\mathbb{U}$ är en äkta delmängd till $\mathbb{N}$ och enligt Exempel 5 har $\mathbb{U}$ lika många element som $\mathbb{N}$. $\square$

(Det finns många fler sådana delmängder, t.ex. $\{2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$.)

Definition.

En mängd som har lika många element som de naturliga talen kallas *uppräknelig.*

$\square$

Man kan visa att de rationella talen är uppräkneliga men att de reella talen är ”fler”, de är *inte* uppräkneliga. Detta visades av Georg Cantor 1872.