

Tentamensskrivning i LMA 110, Matematik för lärare 1, del 2

1. Bevisa periferivinkelsatsen: en periferivinkel i en cirkel är hälften av medelpunktsvinkeln på samma båge.
2. Bestäm en ekvation för mittpunktsnormalen på sträckan AB , där A är punkten $(1, 2)$ och B är punkten $(4, 3)$.
3. Bestäm minsta avståndet från punkten $(-1, -2, -5)$ till linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.
4. Låt $ABCD$ vara en fyrhörning. Ortsvektorerna för A , B , C och D är $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ och $\mathbf{d}$. Punkten P är mittpunkten på AB , Q är mittpunkten på BC , R är mittpunkten på CD och S på DA . Bestäm en ekvation i parameterform för linjen PQ och för linjen SR . Vilken slutsats kan man dra om linjerna PQ , SR och AC ?

5. Bevisa att

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2} . \quad (2p.)$$

6. Relationsfrågor är ett populärt ämne i TV. Tyvärr gäller det då inte de relationer som vi arbetat med.
- (a) Ge exempel på (en matematisk) ekvivalensrelation och visa att denna uppfyller villkoren.
 - (b) Ge exempel på en mängd och dela upp den i ekvivalensklasser med hjälp av en ekvivalensrelation.
 - (c) Ge ett exempel på en relation som är symmetrisk men som varken är reflexiv eller transitiv. Motivera.
7. Följande ekvation har en rent imaginär rot:

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 5x + 4 = 0 .$$

Hitta alla rötter till ekvationen.

8. Ni som följt de spännande slutomgångarna i "Vi i femman" i TV kan inte ha undgått att ha fascinerats av hur duktiga de tävlande de är. Ni kanske då också kommer ihåg följande fråga i kategorin matematik: *Vad är nästa tal i talföljden 2, 5, 11, 23, ...?*
- (a) Ja, vad är nästa tal?
 - (b) Formulera talföljden som en rekursion.
 - (c) Hitta en sluten formel, dvs utan rekursion, för talen i denna följd.
 - (d) Bevisa att detta uttryck verkligen satisfierar rekursionsformuleringen.
 - (e) Ge ett annat svar på vad det femte talet skall vara (som dock skulle ge noll poäng i "Vi i femman") enligt ett annat slutet uttryck som satisfierar de fyra första talen? (4p.)

Varje uppgift (utom 5 och 8) ger maximalt 3 poäng.

Tentan räknas vara färdiggrättad fredagen den 19 juni.

Lycka till!

Torbjörn Lundh och Jan Stevens