

Lösningar till tentamensskrivningen
LMA 110, Matematik för lärare 1, del 2, 20090605

1. **Bevisa periferivinkelsatsen: en periferivinkel i en cirkel är hälften av medelpunktsvinkeln på samma båge.**

Se kompendiet om Euklidisk geometri.

2. **Bestäm en ekvation för mittpunktsnormalen på sträckan AB , där A är punkten $(1, 2)$ och B är punkten $(4, 3)$.**

En normalvektor för mittpunktsnormalen är vektorn $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ortsvektorn för mittpunkten är $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$. En ekvation blir $3x + y = \frac{1}{2}(15 + 5) = 10$.

3. **Bestäm minsta avståndet från punkten $(-1, -2, -5)$ till linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.**

Avståndet från $P = (-1, -2, -5)$ till linjen är avståndet från P till skärningspunkten S mellan linjen och planet π genom P , vinkelrät mot linjen. Planet π har ekvation $4x + 5y + 6z = -44$. I skärningspunkten gäller $4(1 + 4t) + 5(2 + 5t) + 6(3 + 6t) = -44$, så $77t - 32 = -44$, $t = -76/77$. Punkten S är $(-227/77, -226/77, -225/77)$ och avståndet mellan P och S är längden av vektorn $-\frac{1}{77} \begin{pmatrix} 227 \\ 226 \\ 225 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{77} \begin{pmatrix} 150 \\ 72 \\ -160 \end{pmatrix} = \frac{2}{77} \begin{pmatrix} 75 \\ 36 \\ -80 \end{pmatrix}$. Avståndet är $\frac{2}{77} \sqrt{5625 + 1296 + 6400} = \frac{2}{77} \sqrt{13321}$.

4. **Låt $ABCD$ vara en fyrhörning. Ortsvektorerna för A, B, C och D är a, b, c och d . Punkten P är mittpunkten på AB , Q är mittpunkten på BC , R är mittpunkten på CD och S på DA . Bestäm en ekvation i parameterform för linjen PQ och för linjen SR . Vilken slutsats kan man dra om linjerna PQ, SR och AC ?**

Ortsvektorn för P är $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, och Ortsvektorn för Q är $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$. En riktningsvektor för PQ är $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(c - a)$. En ekvation för PQ i parameterform är $x = \frac{1}{2}(a + b) + t(c - a)$. Från $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d$ och $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d$ får vi en ekvation $x = \frac{1}{2}(a + d) + t(c - a)$ för linjen SR . Båda linjer har $c - a$ som riktningsvektor, som är också en riktningsvektor för linjen AC . De tre linjerna PQ, SR och AC är därför parallella.

5. **Bevisa att**

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Låt

$$s_n = \sum_{k=1}^{k=n} k$$

Genom att lägga ihop två sådana summor från olika håll får vi

$$2s_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1).$$

Denna summa består av n stycken termer. Dvs

$$2s_n = n(n+1) \text{ vilket ger oss det vi är ute efter: } s_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

6. Relationsfrågor är ett populärt ämne i TV. Tyvärr gäller det då inte de relationer som vi arbetat med.

- (a) Ge exempel på (en matematisk) ekvivalensrelation och visa att denna uppfyller villkoren.
- (b) Ge exempel på en mängd och dela upp den i ekvivalensklasser med hjälp av en ekvivalensrelation.
- (c) Ge ett exempel på en relation som är symmetrisk men som varken är reflexiv eller transitiv. Motivera.

(a) Till exempel relationen, R , kongruens modulo 3. Dvs $x R y$ betyder $x \equiv y \pmod{3}$ där x och y är heltal. Man kan visa att denna relation är reflexiv, symmetrisk och transitiv och därmed en ekvivalensrelation genom att genomföra argumenten som görs i Vretblad *et al* på sidan 91.

(b) Låt tex $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ och låt relationen vara som i första uppgiften. Vi får då $A_0 = \{0, 3, 6, 9\}$, $A_1 = \{1, 4, 7, 10\}$ och $A_2 = \{2, 5, 8\}$.

(c) Vi kan låta relationen vara $\neq$ på heltalen. $x \neq x$ gäller inte så den är inte reflexiv. Däremot är den symmetrisk eftersom om $x \neq y$ så är $y \neq x$. Vi ser också att den inte är transitiv eftersom vi kan välja $x = z$ vilket ger att även om $x \neq y$ och $y \neq z$ så gäller inte $x \neq z$.

7. Följande ekvation har en rent imaginär rot:

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Hitta alla rötter till ekvationen.

Vi vet att ekvationen har en rent imaginär rot och att den ledande koefficienten (koefficienten framför x^4 är 1) vilket gör (tack vare Sats 7.27 i Vretblad *et al*) att vi kan börja gissa på imaginära heltal $i, 2i, \dots$. Vi får som tur är napp direkt då $(i)^4 - 5i^3 + 5i^2 - 5i + 4 = 0$. Eftersom polynomet är reellt får vi (tack vare Sats 7.20 i Vretblad *et al*) att även konjugatet till i är en rot, dvs $-i$. Detta ger att polynomet

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 5x + 4 \text{ är delbart med } (x-i)(x+i) = x^2 + 1.$$

Utför vi nu divisionen med liggande stolen, trappan eller Mörmoskolsmetoden får vi att

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 5x + 4 = (x^2 + 1)(x^2 - 5x + 4).$$

Rötterna till ekvationen $x^2 - 5x + 4 = 0$ är $x = 1$ och $x = 4$. Från Sats 7.27 igen vet vi att alla dessa rötter ska vara heltal och delare till konstanttermen i ekvationen, 4, vilket ger en extra kontroll. Sammanfattningsvis har vi hittat alla fyra rötter till ekvationen $1, 4, -i$ och i .

8. Ni som följt de spännande slutomgångarna i "Vi i femman" i TV kan inte ha ungått att ha fascinerats av hur duktiga de tävlande de är. Ni kanske då också kommer ihåg följande fråga i kategorin matematik: Vad är nästa tal i talföljden $2, 5, 11, 23, \dots$?

- (a) Ja, vad är nästa tal?
- (b) Formulera talföljden som en rekursion.
- (c) Hitta en sluten formel, dvs utan rekursion, för talen i denna följd.
- (d) Bevisa att detta uttryck verkligen satisfierar rekursionsformuleringen.
- (e) Ge ett annat svar på vad det femte talet skall vara (som dock skulle ge noll poäng i "Vi i femman") enligt ett annat slutet uttryck som satisfierar de fyra första talen?

- (a) Vi ser att vi får efterföljande tal genom att fördubbla det föregående talet och lägga till ett, dvs $2 \cdot 2 + 1 = 5$, $2 \cdot 5 + 1 = 11$, $2 \cdot 11 + 1 = 23$ och att då blir nästa tal $2 \cdot 23 + 1 = 47$.
- (b) Vi kan alltså skriva

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{om } n = 1 \\ 2a_{n-1} + 1 & \text{om } n > 1. \end{cases}$$

- (c) Eftersom $a_n = 2a_{n-1} + 1$ bör ett slutet uttryck en del som är 2^n . Om vi nu tar skriver upp de fem första sådana tal får vi 2, 4, 8, 16, 32 och differensen med ursprungsföljden, $a_n - 2^n$ blir 0, 1, 3, 7, 15 dvs 2^n växer för långsamt. Om vi istället tar 2^{n+1} får vi istället skillnaden $-2, -3, -5, -9, -17$, dvs 2^{n+1} växer för fort. Låt oss testa ett mellanting tex $3 \cdot 2^{n-1}$. Då får vi skillnaden $-1, -1, -1, -1, -1$. Vilket gör att vi har $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$. Åtminstone för de fem första talen.

En annat mer rättframt sätt att se detta är att nysta upp rekursionen i en tabell och sedan använda formeln för en geometrisk summa på följande sätt.

$$a_n = 2^n + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 1 = 2^n + 2^{n-1} - 1 = 3 \cdot 2^{n-1} - 1;$$

där vi använt att

$$\sum_{k=0}^{n-2} 2^k = \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 2^{n-1} - 1.$$

- (d) Vi kan visa att detta gäller allmänt genom att antingen se om $b_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ uppfyller rekursionsformeln och hänvisa till att en sådan rekursion har unik lösning, eller utföra ett induktionsbevis.
- Vi ser först att $b_1 = 3 \cdot 2^0 - 1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2 = a_1$.
 - Antag nu att $a_p = b_p$.
 - Vi vill visa $a_{p+1} = b_{p+1}$.

$$VL = 2a_p + 1 = 2b_p + 1 = 2(3 \cdot 2^{p-1} - 1) + 1 = 3 \cdot 2^p - 2 + 1 = b_{p+1} = HL.$$

- iv. Med hjälp av induktion har vi att $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ för alla strikt positiva heltal.
- (e) Om vi tex låter $c_n = b_n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ är den andra termen noll för de fyra första talen, dvs $c_n = a_n$ för $n = 1, \dots, 4$. Däremot är $c_5 = 47 + (5-1)(5-2)(5-3)(5-4) = 47 + 4! = 47 + 24 = 71$. Allmänt blir då formeln

$$c_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1 + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4).$$