

Tentamensskrivning i LMA 110, Matematik för lärare 1, del 2

1. Bevisa att höjderna i en triangel skär varandra i en punkt.
2. Bestäm en ekvation för planet som innehåller de tre punkterna $(-1, 0, 0)$, $(2, 1, 1)$ och $(1, 2, -4)$.
3. Bestäm minsta avståndet från punkten $(-1, -2, -5)$ till linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.
4. Låt OAB vara en triangel och sätt $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Visa att en punkt P ligger på bisektrisen till vinkeln $\angle AOB$ om och endast om det finns en skalär λ så att

$$\overrightarrow{OP} = \lambda \left(\frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} + \frac{1}{|\mathbf{b}|} \mathbf{b} \right).$$

5. Faktorisera polynomet $X^4 - 2X^3 + 4X - 4$ så långt det går i

- (a) $\mathbb{Z}(X)$,
- (b) $\mathbb{R}(X)$,
- (c) $\mathbb{C}(X)$.

Tips: $X^2 - 2$ är ett annat polynom som kanske kan vara till hjälp.

6. Ge en ekvation där de tre lösningarna ligger i hörnen av en liksidig triangel med ena hörnet i punkten $i \in \mathbb{C}$.
7. Faktorisera polynomet $f(x)$ nedan i reella irreducibla polynom. Ekvationen $f(x) = 0$ har sex identiska rötter.

$$f(x) = 2x^6 - 84x^5 + 1470x^4 - 13720x^3 + 72030x^2 - 201684x + 235298.$$

8. Låt oss se på följande tre relationer mellan komplexa tal.
 - (a) $z \sim_a w$ då och endast då z och w ligger på samma cirkel centrerad i origo.
 - (b) $z \sim_b w$ då och endast då z och w ligger på samma cirkel centrerad i någon punkt i $\mathbb{Z}$ på reella-axeln.
 - (c) $z \sim_c w$ då och endast då z och w ligger på samma cirkel centrerad någonstans i $\mathbb{C}$.
(Vi tillåter oss i detta fall att även låta cirklarna ha oändlig radie, dvs räta linjer är också cirklar, de råkar bara gå igenom oändligheten. Som du kanske minns kallade vi, genom att citera Vretblad själv, sådana generaliserade cirklar för sirklar.)Är någon av dessa relationer en ekvivalensrelation? Motivera dina svar!

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng.

Tentan räknas vara färdiggrättad tisdagen den 1 september.

Lycka till!

Torbjörn Lundh och Jan Stevens