

Lösningar till tentamensskrivningen
LMA 110, Matematik för lärare 1, del 2, 20090818

1. Bevisa att höjderna i en triangel skär varandra i en punkt.

Se kompendiet om Euklidisk geometri.

2. Bestäm en ekvation för planet som innehåller de tre punkterna $(-1, 0, 0)$, $(2, 1, 1)$ och $(1, 2, -4)$.

Två riktningsvektorer för planet är $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. En normalvektor är $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.
En ekvation blir $-3x + 7y + 2z = 3$.

3. Bestäm minsta avståndet från punkten $(-1, -2, -5)$ till linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Avståndet från $P = (-1, -2, -5)$ till linjen är avståndet från P till skärningspunkten S mellan linjen och planet π genom P , vinkelrät mot linjen. Planet π har ekvation $x + 2y - 2z = 5$. I skärningspunkten gäller $(1 + t) + 2(2 + 2t) - 2(3 - 2t) = 5$, så $9t - 1 = 5$, $t = 2/3$. Punkten S är $(5/3, 10/3, 5/3)$ och avståndet mellan P och S är längden av vektorn $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 20 \end{pmatrix} = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Avståndet är $\frac{4}{3} \sqrt{4 + 16 + 25} = 4\sqrt{5}$.

4. Låt OAB vara en triangel och sätt $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Visa att en punkt P ligger på bisektrisen till vinkeln $\angle AOB$ om och endast om det finns en skalär λ så att

$$\overrightarrow{OP} = \lambda \left(\frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} + \frac{1}{|\mathbf{b}|} \mathbf{b} \right).$$

Vi visar först att vektorn $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} + \frac{1}{|\mathbf{b}|} \mathbf{b}$ ligger på bisektrisen. Eftersom $\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a}$ och $\overrightarrow{OB'} = \frac{1}{|\mathbf{b}|} \mathbf{b}$ är båda enhetsvektorer, är $OA'QB'$ en parallelogram där alla sidor har längd 1. Triangelarna $\triangle OA'Q$ och $\triangle OB'Q$ är då kongruenta, så $\angle A'OQ \cong \angle B'OQ$, och linjen OQ är bisektrisen.

Om nu en punkt P ligger på bisektrisen, då är $\overrightarrow{OQ}$ och $\overrightarrow{OP}$ parallella och $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OQ}$.

5. Faktorisera polynomet $X^4 - 2X^3 + 4X - 4$ så långt det går i

- (a) $\mathbb{Z}(X)$,
- (b) $\mathbb{R}(X)$,
- (c) $\mathbb{C}(X)$.

Tips: $X^2 - 2$ är ett annat polynom som kanske kan vara till hjälp.

Vi ser att $\sqrt{2}$ är en rot till tipspolynomet. Genom insättning av den roten ser vi att den också är en rot till stora polynomet. Eftersom polynomet saknar irrationella koefficienter måste även $-\sqrt{2}$ vara en rot, dvs vi kan dividera stora polynomet med tipspolynomet $X^2 - 2$. Polynomdivision ger att

$$X^4 - 2X^3 + 4X - 4 = (X^2 - 2)(X^2 - 2X + 2).$$

Rötterna till den andra faktorn är $X = 1 \pm i$. Detta ger att faktoriseringarna är

- (a) $(X^2 - 2)(X^2 - 2X + 2)$ i $\mathbb{Z}(X)$,
- (b) $(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X^2 - 2X + 2)$ i $\mathbb{R}(X)$ och
- (c) $(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X - 1 - i)(X - 1 + i)$ i $\mathbb{C}(X)$.

6. Ge en ekvation där de tre lösningarna ligger i hörnen av en liksidig triangel med ena hörnet i punkten $i \in \mathbb{C}$.

Vi vet att lösningen till en binomisk ekvation ger n stycken punkter jämnt fördelade på en cirkel centrerad i origo. I vårt fall vill vi ha $n = 3$. Vi vill alltså hitta $w \in \mathbb{C}$ så att $z = i$ är en lösning till

$$z^3 = w.$$

I och med att i ligger på enhetscirkeln så måste w också göra det. Vi söker alltså ett argument för w . Ett sådant är lätt att få genom att multiplicera $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$ med 3, vilket ger $w = -i$. Vi har alltså att ekvationen

$$z^3 = -i$$

har lösningar som ligger som hörn i en liksidig triangel och med ett hörn i i . (De andra två hörnen ligger i $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ och $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.)

7. Faktorisera polynomet $f(x)$ nedan i reella irreducibla polynom. Ekvationen $f(x) = 0$ har sex identiska rötter.

$$f(x) = 2x^6 - 84x^5 + 1470x^4 - 13720x^3 + 72030x^2 - 201684x + 235298.$$

Eftersom vi har sex identiska rötter till $f(x) = 0$, har vi speciellt att sjättederivatan av $f(x)$ också har ett nollställe för denna rot. Se Vretblad *et al.* Sats 7.24. Sjättederivatan är lätt att räkna ut eftersom vi kan glömma alla termer av grad 4 eller lägre.

$$f^{(6)}(x) = 6! \cdot 2x - 5! \cdot 84.$$

Ett nollställe till $f^{(6)}(x)$ är då

$$x = \frac{5! \cdot 84}{6! \cdot 2} = \frac{84}{6 \cdot 2} = 7.$$

Eftersom $f(x)$ är ett sjättegradspolynom som har sex identiska rötter. Så kan vi alltså enligt faktorsatsen (Sats 7.9) skriva $f(x) = c(x - 7)^6$. Genom att se på högstegradstermen, ser vi att $c = 2$, dvs vi den fullständiga faktoriseringen är

$$f(x) = 2(x - 7)^6.$$

8. Låt oss se på följande tre relationer mellan komplexa tal.

- (a) $z \sim_a w$ då och endast då z och w ligger på samma cirkel centrerad i origo.
- (b) $z \sim_b w$ då och endast då z och w ligger på samma cirkel centrerad i någon punkt i $\mathbb{Z}$ på reella-axeln.
- (c) $z \sim_c w$ då och endast då z och w ligger på samma cirkel centrerad någonstans i $\mathbb{C}$.
(Vi tillåter oss i detta fall att även låta cirkelarna ha oändlig radie, dvs räta linjer är också cirklar, de råkar bara gå igenom oändligheten. Som du kanske minns kallade vi, genom att citera Vretblad själv, sådana generaliserade cirklar för sirklar.)

Är någon av dessa relationer en ekvivalensrelation? Motivera dina svar!

Vi testar reflexivitet, symmetri och transitivitet.

(a) Reflexiv, $z \sim_a z$, eftersom en punkt som ligger på en cirkel, ligger på cirkeln.

Symmetrisk, $z \sim_a w$ implicerar $w \sim_a z$, eftersom om z och w ligger på samma cirkel så gör naturligtvis w och z det också.

När det gäller transitivitet, noterar vi först att om z och w ligger på samma cirkel är denna cirkel unik, $\{s \in \mathbb{C} : |s| = |z|\}$, eftersom cirkeln är centrerad i origo. Så om $z \sim_a w$ och $w \sim_a v$ är $v \in \{s \in \mathbb{C} : |s| = |z|\}$ och vi har att $z \sim_a v$, dvs transitiviteten är uppfylld och $\sim_a$ är en ekvivalensrelation.

(b) När det gäller reflexivitet och symmetri för $\sim_b$ resonerar vi på samma sätt som för $\sim_a$ ovan. När det gäller transitivitet, antar vi att $z \sim_b w$, dvs z och w ligger på en cirkel centrerad kring ett heltal n . Utsagan $w \sim_b v$ innebär att det finns en cirkel där både w och v ligger, men den behöver inte vara centrerad kring n . Antag att den är centrerad kring ett annat heltal m . Frågan är nu om vi kan hitta en tredje cirkel, centrerad kring ett heltal l , som går genom z och v . För ett given heltal l är cirkeln genom z unik, och den skär cirkeln centrerad i m i högst två punkter. Genom att variera l hittar vi högst uppräknelig många punkter v' på cirkeln centrerad i m med $v' \sim_b z$. Vi har alltså att $\sim_b$ inte är en ekvivalensrelation.

(c) För $\sim_c$ har vi åter igen reflexivitet och symmetri som i (a). När det gäller transitivitet kan vi använda argumentet att givet tre punkter, som inte är på en rät linje, finns det en unik cirkel som går genom alla tre punkter. Om vi nu tillåter cirklarna ha oändlig radie också, har vi alltså att tre godtyckliga punkter z , w , och v alltid ligger på en gemensam cirkel. Detta innebär speciellt att transitivitet gäller automatiskt och vi får att $\sim_c$ är en ekvivalensrelation. (Men den är inte så intressant, eftersom alla punkter i $\mathbb{C}$ ligger i samma ekvivalensklass.)