

**Lösningar till tentamensskrivningen
LMA 110 , Matematik för lärare 1, del 2, 20100109**

- 1. Visa bisektrissatsen: bisektrisen till en vinkel i en triangel delar motstående sida i delar som är proportionella mot de övriga sidor.**

Se kompendiet.

- 2. Bestäm en ekvation för planet som innehåller de tre punkterna $(2, 0, 1)$, $(4, -1, 2)$ och $(3, 2, 2)$.**

Normalvektorn till planet är vinkelrät mot vektorerna $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och fås som vektorprodukt $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.
Ekvationen är $-3x - y + 5z = -1$.

- 3. Bestäm minsta avståndet från punkten $(5, 5, -4)$ till linjen genom punkterna $(0, 3, 0)$ och $(3, -3, -6)$.**

Linjen genom $(0, 3, 0)$ och $(3, -3, -6)$ har riktningsvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ och ges i parameterform av $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ och avståndet är minst i punkten där planet genom $(5, 5, -4)$, vinkelrät mot linjen, skär linjen. Planet har ekvation $-x + 2y + 2z = -3$. I skärningspunkten gäller $t + 2(3 - 2t) + 4t = -3$, så $9t = -9$ och $t = -1$. Skärningspunkten är $(1, 1, -2)$ och avståndet till $(5, 5, -4)$ är längden av vektorn $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Svaret är $2\sqrt{4 + 4 + 1} = 6$.

- 4. Visa att**

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2).$$

Vi har $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2$,
så $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2 = 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

- 5. Visa att olikheten $3^n > 4n^2$ gäller för alla naturliga tal $n \geq 4$.**

Vi använder induktion.

1. Vi ser genom insättning att olikheten är sann för $n = 4$, ty

$$3^4 = 81 > 4 \cdot 4^2 = 64.$$

2. Antag nu att $3^p > 4p^2$ gäller för ett $p \geq 4$. Vi vill nu visa att $3^{p+1} > 4(p+1)^2$.

$$VL = 3^{p+1} = 3 \cdot 3^p > (\text{på grund av induktionsantagandet}) > 3 \cdot 4p^2.$$

Vi kan också uppskatta högerledet:

$$4(p+1)^2 = 4(p^2 + 2p + 1) < 4(p^2 + p^2 + p^2) = 3 \cdot 4p^2 < VL.$$

3. Med hjälp av induktionsprincipen har vi alltså att $3^n > 4n^2$ gäller för alla naturliga tal $n \geq 4$.

6. $x = \sqrt{5}$ är en rot till ekvationen

$$x^5 - 3x^4 - x^3 + 3x^2 - 20x + 60 = 0.$$

Hitta de andra rötterna. Stalltips: Det finns en rent imaginär rot också.

Eftersom $x = \sqrt{5}$ är en rot till polynomet som endast har rationella koefficienter, måste även $x = -\sqrt{5}$ var en rot. Det vill säga, vi kan faktorisera bort $(x^2 - 5)$ genom polynomdivision. Detta ger oss att

$$x^5 - 3x^4 - x^3 + 3x^2 - 20x + 60 = (x^2 - 5)(x^3 - 3x^2 + 4x - 12).$$

Vi fick också ett tips att det finns en rent imaginär rot också. Dvs en rot på formen $x = \alpha i$, där α är ett reellt tal. Eftersom koefficienterna till polynomet i vänsterledet i ekvationen är alla reella, innebär det att även konjugatet till den rent komplexa också är en rot, dvs $x = -\alpha i$. Detta betyder att $(x^2 + \alpha^2)$ är en faktor i $x^3 - 3x^2 + 4x - 12$. Återigen en polynomdivision, denna gång med det obestämda $(x^2 + \alpha^2)$, ger oss att $\alpha = 2$ och att

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = (x^2 + 4)(x - 3).$$

Sammanfattningsvis har vi rötterna $\pm\sqrt{5}, \pm 2i$ och 3.

7. Vi spelar ett parti *sänka komplexa skepp*. Spelreglerna och spelplanen ser lite annorlunda ut jämfört med det klassiska spelet. Du har sänkt alla skepp utom motståndarens hangarfartyg, som är 6 i.e. långt (fartyget täcker 7 punkter i koordinatsystemet) och har en försumbar bredd. Fartyget kan bara placeras vågrät eller lodrät och fartygets start- och slutkoordinater är heltal. Spelplanen är kvadratisk, 20×20 i.e.

Följande har rapporterats in till vår sambandscentral:

Vår dekrypteringsavdelning har fått fram följande information:

(a) Hangarfartyget kan inte förflytta sig.

(b) Vi vet att fiendefartyget har order att inte vistas i minerade områden.

Våra jagare har utfört följande:

Jagare 1: Vi kontrollerar hela området $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z < -1\}$, dvs. fartyget kan inte finnas här. Vi har minerat hela kvadranten där $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ligger.

Jagare 2: Vi har utan framgång gjort sökningar efter hangarfartyget på hela spelplanen, men området där $\{z \in \mathbb{C} : 7 < |z| < 10\}$ är kvar att undersöka.

Rita upp spelplanen och markera begränsningarna och ange vart skeppet kan vara beläget enligt ovanstående rapporter.

Genom att se på de givna villkoren får vi att hangarfartyget måste ligga mellan $8 - i$ och $8 + 5i$.

8. Antag att du, för att dryga ut det knappa studiemedlet, startar en glassförsäljning 1:a januari. Eftersom du är både driftig och noggrann gör du en affärsplan. Enligt den så räknar du med att varje vecka få 200 nya kunder och 60% återvändande kundbesök. Du antar också att du kommer att sälja 1000 glassar första veckan.

(a) Skriv upp en iterativ formel för antalet sålda glassar vecka n .

(b) Visa att denna iterativa formel ger att det förväntade antalet sålda glassar vecka n är

$$\frac{2500}{3} (3/5)^n + 500.$$

(c) Om dina förväntningar visar sig vara riktiga - hur många glassar per vecka kommer du att sälja i det långa loppet? Dvs när n går mot oändligheten?

(a) Vi har att den förväntade glassförsäljningen vecka v är följande funktion $g(v)$

$$g(v) = 0.6 \cdot g(v-1) + 200 \text{ och för första veckan } g(1) = 1000.$$

(b) Uttrycket visar vi med induktion, dvs vi låter en ny funktion vara

$$\gamma(n) = \frac{2500}{3} (3/5)^n + 500.$$

Vi ser att $g(1) = \gamma(1) (= 1000)$. Om vi sedan antar att $g(p) = \gamma(p)$, ser vi direkt att

$$g(k+1) = \gamma(k) \frac{3}{5} + 200 = \frac{2500}{3} \left(\frac{3}{5}\right)^{k+1} + 300 + 200 = \gamma(k+1).$$

Dvs genom induktionsprincipen har vi att $g(v) = \gamma(v)$, för alla positiva heltal v .

(c) När $n \rightarrow \infty$ går $(3/5)^n$ mot noll. Dvs den förväntade försäljningen går mot 500 glassar per vecka.