Kortfattade lösningar till Omtentamen i Matematik, del 1, LMA 110, 10 april 2010

Problem 1.
Genom prövning, hittar men en rot, $x = -1$. Divisions algoritmen ger

$$x^3 - 3x^2 + x + 5 = (x+1)(x^2 - 4x + 5).$$

Ekvationen $x^2 - 4x + 5 = 0$ har komplexa rötterna: $2 + i$ och $2 - i$.

Svar: -1, $2 + i$ **och** $2 - i$

Problem 2. Olikheten är ekvivalent med

$$\frac{8(x-2) - 3(x+3) - 5(x+3)(x-2)}{(x+3)(x-2)} \geq 0$$

som kan förenklas till följande

$$\frac{-5x^2 + 5}{(x+3)(x-2)} \geq 0.$$

Division med -5 ger

$$\frac{x^2 - 1}{(x+3)(x-2)} \leq 0.$$

Täljaren kan faktoriseras som $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, och olikheten blir

$$\frac{(x-1)(x+1)}{(x+3)(x-2)} \leq 0.$$

Genom att göra en tabell och studera tecken, hittar man lösningen till olikheten: $-3 < x \leq -1$ och $1 \leq x < 2$.

Svar: $-3 < x \leq -1$ **och** $1 \leq x < 2$

Problem 3. Låt x vara antalet enkronor. Enligt hypothesen, satisfierar x följande ekvationer: $x \equiv 2 (\mathrm{mod} 3)$, $x \equiv 13 (\mathrm{mod} 14)$, $x \equiv 3 (\mathrm{mod} 23)$.

Den tredje ekvationen är ekvivalent med $x = 23k_1 + 3$, för ett heltal k_1.

Den andra ekvationen ger $23k_1 + 3 \equiv 13 (\mathrm{mod} 14)$ som implicerar $9k_1 \equiv -4 (\mathrm{mod} 14)$. Multiplikation med -3 (som är invers till 9 modulo 14) ger $k_1 \equiv 12 (\mathrm{mod} 14)$.

Vi skriver $k_1 = 14k_2 + 12$, där k_2 är heltal. Detta implicerar att $x = 23(14k_2 + 12) + 3 = 279 + 322k_2$.

Eftersom x ger rest 2 vid division med 3, får man att $k_2 \equiv 2 (\mathrm{mod} 3)$. Låt $k_2 = 2 + 3k_3$, k_3 heltal. Detta implicerar $x = 279 + 322(2 + 3k_3) = 923 + 966k_3$. Eftersom

$0 < x < 1000$, $k_3 = 0$ och $x = 923$.

Svar: $x = 923$

Problem 4. Fermats lilla sats. Om p är ett primtal, det gäller att

$$a^p \equiv a(\mathrm{mod} p),$$

för varje heltal a.

Bevis. Om p delar a är $a \equiv 0$ och $a^p \equiv 0$ och saken är klar. Vi antar nu att p delar inte a. Eftersom p primtal, $\mathrm{SGD}(a, p) = 1$ och a är inverterbart modulo p. Multiplicera talen 1, 2,..., $p-1$ med a. Vi har talen a, $2a$, ..., $(p-1)a$, som alla ger olika rester vid division med p, pga följande resonemang: Antag att det finns $0 < n < p$ och $0 < m < p$ sådana att $na \equiv ma(\mathrm{mod} p)$. Detta ger $(n-m)a \equiv 0(\mathrm{mod} p)$, som implicerar att $n - m \equiv 0(\mathrm{mod} p)$ eftersom a är inverterbart modulo p. Vi får att $n \equiv m(\mathrm{mod} p)$. Dessutom $0 < n < p$ och $0 < m < p$ som ger $n = m$.

Den nya listans rester vid division med p är en uppräkning av samma tal som i den första. Om vi betraktar produkterna av talen i listorna, måste resultatet bli samma modulo p:

$$(p-1)! \equiv (p-1)! a^{p-1}(\mathrm{mod} p).$$

Men $(p-1)!$ är ej delbart med p, dvs inverterbart modulo p. Genom multiplikation med en invers till detta tal, har vi

$$1 \equiv a^{p-1}(\mathrm{mod} p).$$

Multiplikation med a ger $a \equiv a^p(\mathrm{mod} p)$.

5 a. Multiplikationsprincipen ger

$$\binom{49}{2}\binom{51}{2}$$

b På samma sätt

$$\binom{a}{2}\binom{b}{2}$$

c. Vänstra ledet är antalen sätt att välja $k+l$ individer ur en grupp av a kvinnor och b män, på sådant sätt att k av dem är kvinnor och l av dem är män. Högra ledet är det totala antalet sätt att välja $k+l$ bland $a+b$ (utan restriktioner). Högra ledet blir alltså större.

6. Låt a_n vara antalet sätt att lägga en gång av längd n. Rekursionekvationen blir

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$$

där a_{n+1} är antalet sätt där sista plattan är kvadratisk och a_n är antalet sätt där sista plattan är rektangulär.

Den karakteristiska ekvationen blir $x^2 - x - 2 = 0$; den har lösningarna $x = -1$ och $x = 2$. Den allmänna lösningen till rekursionsekvationen är alltså

$$a_n = A2^n + B(-1)^n.$$

Nu är $a_1 = 1$ och $a_2 = 3$ vilket ger $A = 2/3$ och $B = 1/3$, så

$$a_n = 2/32^n + 1/3(-1)^n.$$

7. Problemet är ekvivalent med att fördela 76 objekt i fyra lådor. Känd formel ger svaret

$$\binom{76+4-1}{4-1} = \binom{79}{3}.$$

8. Låt A vara mängden av de som är högst 20 år, B vara de som är minst 10 och högst 65 år och C vara de som är minst 50 år gamla. Förutsättningarna i talet ger då

$$|A| = 100, \quad |B| = 60, \quad |C| = 70$$

och

$$|A \cap B| = 30, \quad |B \cap C| = 20.$$

Dessutom är $A \cap C = \emptyset$. Därför blir

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| = 100 + 60 + 70 - 30 - 20 = 180.$$