

**Kortfattade lösningar till Tentamen,
LMA110, del 1, 10 juni -08**

1. Olikheten är ekvivalent med

$$\frac{9(x + 4/3)(x - 2/3)}{-(x - 2)(x + 2)} \geq 0.$$

Man observerar att täljaren blir noll om och endast om $x = -4/3$ eller $x = 2/3$. Nämnaren är ej definierat för $x = 2$ och $x = -2$. Teckenstudium ger att olikheten gäller för $-2 < x \leq -4/3$ och $2/3 \leq x < 2$.

Svar: $-2 < x \leq -4/3$ och $2/3 \leq x < 2$.

2. (a) Det går på

$$\binom{11}{4} = 330$$

olika sätt.

Svar: 330

- (b) Antalet kommitéer där båda de kära vännerna ingår är $\binom{9}{2} = 36$, antalet där ingen ingår är $\binom{9}{4} = 126$. Så totalt finns det $36 + 126 = 162$ kommitéer av önskat slag.

Svar: 162

3. Man observerar först att $\text{SGD}(143, 39) = 13$. Eftersom 559 är delbart med 13, har ekvationen lösningar. Efter division med 13, blir ekvationen ekvivalent med $11x + 3y = 43$. Vi vet att $\text{SGD}(11, 3) = 1$ och $1 = 4 \cdot 3 - 11$. En lösning till ekvationen $11x + 3y = 43$ är $x_0 = -43$, $y_0 = 4 \cdot 43 = 172$.

Samtliga lösningar ges av följande formler:

$$x = 3n - 43, y = 172 - 11n,$$

där n är ett godtyckligt heltal. Eftersom x och y skall vara positiva, får vi att n uppfyller villkoren $n > 43/3$ och $n < 172/11$.

Detta implicerar $n = 15$. Den enda positiva lösningen är $x = 2$ och $y = 7$.

Svar: $x = 2$ och $y = 7$.

4. Ordet *SOMMAR* består av 2 st. *M* och 1 vardera av *S, O, A* och *R*.

- (a) Om vi betraktar *M* som olika kan vi bilda $6!$ ord. Men de olika orden blir "samma" när vi permuterar *M* så vi får $6!/2! = 360$ ord.

Svar: 1260

- (b) Vi delar upp i två fall.

I. Ord med två *M*.

Vi placerar först ut de två *M*-en. Det går på $\binom{4}{2} = 6$ sätt. Sen har vi kvar fyra bokstäver att placera på två platser. Det går på $4 \cdot 3 = 12$ sätt. Så det finns $6 \cdot 12 = 72$ ord med två *M*.

II. Ord med högst ett *M*.

Nu har vi fem bokstäver som skall placeras på fyra platser. Det går på $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ sätt.

Totalt får vi $72 + 120 = 192$ olika ord.

Svar: 192

5. Efter prövning, hittar man en lösning $x = -1$. Division med $x + 1$ ger kvoten $4x^2 + 4x + 5$. Ekvationen $4x^2 + 4x + 5 = 0$ har komplexa lösningar $-\frac{1}{2} + i$ och $-\frac{1}{2} - i$.

Svar: -1 , $-\frac{1}{2} + i$ och $-\frac{1}{2} - i$.

6. (a) Vi kan tänka på problemet som att vi skall stoppa ned 14 ägg i fyra olika korgar. Vi börjar med att stoppa ned 6 ägg i den första korgen. Sen återstår det 8 ägg att fördela godtyckligt på fyra korgar. "Streck i räkningen" med 8 ettor och 3 streck ger $\binom{11}{3} = 165$ olika sätt.

Svar: 165

- (b) Om vi struntar i villkoret finns det ("streck i räkningen" med 14 ettor och 3 streck) $\binom{17}{3} = 680$ sätt att fördela äggen.

Att villkoret *inte* är uppfyllt innebär att någon eller några av $k, l, m, n \geq 6$. Låt E_k, E_l, E_m och E_n vara de lösningar där $k \geq 6$, $l \geq 6$, $m \geq 6$ respektive $n \geq 6$. Vi skall beräkna $\#(E_k \cup E_l \cup E_m) \cup E_n$ med inklusion-exklusion. Enligt (a) gäller att $\#E_i = 165$ där $i = k, l, m, n$. För de $\binom{4}{2} = 6$ tvåsnitten gäller $\#(E_i \cap E_j) = \binom{5}{3} = 10$. Eftersom $3 \cdot 6 > 14$ är tresnitten och fyrsnittet tomma och bidrar inte till formeln. Så

$$\#(E_k \cup E_l \cup E_m \cup E_n) = 4 \cdot 165 - 6 \cdot 10 = 600.$$

Det sökta antalet blir alltså $680 - 600 = 80$.

Svar: 80

7. Antag först att a har en invers b modulo n . Då gäller $ab - 1 = nk$, för något heltal k . Men om d är delare till a och n , så $d|ab$ och $d|nk$. Detta implicerar att $d|ab - nk = 1$. Vi får $\text{SGD}(a, n) = 1$.

Antag nu att $\text{SGD}(a, n) = 1$. Enligt Euklides algoritm, finns x och y heltal sadana att $1 = ax + ny$. Detta implicerar $n|1 - ax$, som visar att a har en invers x modulo n .

8. Låt N vara antalet sätt man kan välja 4 av talen $1, 2, 3, \dots, 99, 100$.

Att

$$N = \binom{100}{4}$$

är välkänt.

För att se att $N = \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \dots + \binom{99}{3}$ delar vi in fall efter hur stort det största valda talet är. Observera att det största talet kan vara $4, 5, 6, \dots, 99, 100$. Om det största talet är n skall vi förutom n välja ytterligare tre tal som är strikt mindre än n . Det går på $\binom{n-1}{3}$ olika sätt. Alltså gäller

$$N = \binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \dots + \binom{99}{3}$$

och påståendet är bevisat.