

**Kortfattade lösningar till Tentamen,
LMA110, del 1, 22 augusti -09**

1. Ekvationen är ekvivalent med

$$\sqrt{x+13} = x+1.$$

Kvadrering ger $x+13 = x^2+2x+1$, som är ekvivalent med $x^2+x-12 = 0$. Denna ekvation har lösningarna $x_1 = 3$ och $x_2 = -4$. Eftersom $x+1 \geq 0$, dvs. $x \geq -1$, har rotekvationen bara en lösning $x_1 = 3$.

Svar: $x = 3$.

2. (a) Vi skall välja 3 av 10 utan hänsyn till ordning. Det går på $\binom{10}{3} = 120$ sätt.

Svar: 120

- (b) Antalet grupper med 2 kvinnor är $\binom{6}{2}4 = 60$. Antalet grupper med 3 kvinnor är $\binom{6}{3} = 20$. Så totalt finns det $60 + 20 = 80$ grupper.

Svar: 80

3. Absolut beloppets definition ger att $|x-2| = x-2$ om $x \geq 2$, $|x-2| = 2-x$ om $x < 2$, $|2x+4| = 2x+4$ om $x \geq -2$ och $|2x+4| = -2x-4$ om $x < -2$.

Vi har tre fall:

Fall 1. $x < -2$. Ekvationen blir ekvivalent med $2-x+2x+4 = 1$, som ger $x = -5$. Eftersom $-5 < -2$, är -5 en lösning.

Fall 2. $-2 \leq x < 2$. Ekvationen blir ekvivalent med $2-x-2x-4 = 1$, som ger $x = -1$. Eftersom $-2 < -1 < 2$, är -1 en lösning.

Fall 3. $x \geq 2$. Ekvationen blir ekvivalent med $x-2-2x-4 = 1$, som ger $x = -7$. Men $-7 < 2$, som implicerar att -7 inte är en lösning.

Svar: $x = -5$, $x = -1$.

4. Ordet *PASSARE* innehåller två *A* och två *S* och en vardera av *P* och *R*.

- (a) Det finns $\frac{7!}{2!2!} = 1260$ sådana ord.

Svar: 1260

(b) Vi delar upp i fyra fall.

I. 2 A och 2 S :

Två A kan placeras på $\binom{5}{2}$ sätt. Sen kan två S placeras på $\binom{3}{2}$ sätt och på den sista platsen har vi 3 val. Så antalet blir $\binom{5}{2}\binom{3}{2}3 = 90$.

II. 2 A och ≤ 1 S :

Två A kan placeras på $\binom{5}{2}$ sätt. Sen kan de sista 3 platserna fyllas på $4 \cdot 3 \cdot 2$ sätt. Så antalet blir $\binom{5}{2}4! = 240$.

III. 2 S och ≤ 1 A :

Som i II blir antalet 240

IV. Ingen dublett:

Nu har vi 5 olika bokstäver så antalet ord blir $5! = 120$.

Totalt får vi $90 + 2 \cdot 240 + 120 = 690$ ord.

Svar: 690

5. **Fermats lilla sats.** Om p är ett primtal, så gäller

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

för varje heltal a .

Bevis. Om p delar a är $a \equiv 0$ och $a^p \equiv 0$ och saken är klar. Vi antar nu att p delar inte a . Eftersom p primtal, $\text{SGD}(a, p) = 1$. Multiplicera talen $1, 2, \dots, p-1$ med a . Vi har talen $a, 2a, \dots, (p-1)a$, som alla ger olika rester vid division med p eftersom a är inverterbart modulo p . Den nya listans rester vid division med p är en uppräknings av samma tal som i den första. Om vi betraktar produkterna av talen i listorna, måste resultatet bli samma modulo p :

$$(p-1)! \equiv (p-1)!a^{p-1} \pmod{p}.$$

Men $(p-1)!$ är ej delbart med p , dvs inverterbart modulo p . Genom multiplikation med en invers till detta tal, har vi

$$1 \equiv a^{p-1} \pmod{p}.$$

Multiplikation med a ger $a \equiv a^p \pmod{p}$.

6. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 = 2r + 3$ med rötterna 3 och -1 . Så den allmänna lösningen är $a_n = A3^n + B(-1)^n$. Villkoren $a_0 = 0$ och $a_1 = 4$ ger

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 3A - B = 4 \end{cases}.$$

Detta ekvationssystem har lösningen $A = 1$, $B = -1$. Alltså är $a_n = 3^n - (-1)^n = 3^n + (-1)^{n+1}$.

Svar: $3^n + (-1)^{n+1}$.

7. Eftersom x ger rest 15 vid division med 31, kan man skriva $x = 15 + 31k_1$ med k_1 heltal. Eftersom x ger rest 3 vid division med 13, $15 + 31k_1 \equiv 3 \pmod{13}$, som är ekvivalent med $5k_1 \equiv 1 \pmod{13}$.

En invers till 5 modulo 13 är 8 (som man kan hitta enligt Euklides algoritm för 5 och 13). Multiplikation med 8 ger $k_1 \equiv 8 \pmod{13}$. Vi skriver $k_1 = 8 + 13k_2$, för ett heltal k_2 . Detta implicerar att $x = 15 + 31(8 + 13k_2) = 263 + 403k_2$. Det minsta positiva heltal x är 263.

Svar: 263.

8. Vi delar upp i fall.

0. Sökta tal utan ettor är 4^5

I. Sökta tal med 1 etta är $5 \cdot 4^4$

II. Sökta tal med 2 ettor. Om vi struntar i villkoret kan 2 ettor placeras på $\binom{5}{2} = 10$ sätt. Av dessa har 4 två ettor intill varandra. Så antalet godkända sätt att placera 2 ettor är $10 - 4 = 6$. Sen har vi 4^3 val för de sista 3 platserna. Så det finns $6 \cdot 4^3$ sökta tal med 2 ettor.

III. Sökta tal med 3 ettor. Ettorna måste stå på plats 1, 3 och 5. Sen har vi 4^2 val för de sista 2 platserna. Så det finns 4^2 sökta tal med 3 ettor.

IV-V. Det finns inga tal med 4 eller 5 ettor utan intilliggande ettor.

Totalt finns det alltså $4^5 + 5 \cdot 4^4 + 6 \cdot 4^3 + 4^2 = 2704$ sökta tal.

Svar: 2704.