

Kortfattade lösningar till Tentamen i Matematik, del 1, LMA 110, 23 februari 2010

Problem 1. Ekvationen är ekvivalent med

$$3\sqrt{x-1} = 2 - \sqrt{3x+1}.$$

Kvadrering ger

$$9(x-1) = 4 - 4\sqrt{3x+1} + (3x+1)$$

som är ekvivalent med $3x - 7 = -2\sqrt{3x+1}$. Efter kvadrering igen, blir ekvationen $9x^2 - 42x + 49 = 4(3x+1)$ eller $x^2 - 6x + 5 = 0$, som har rötterna 1 och 5. Prövning i den ursprungliga ekvation ger bara lösningen $x = 1$.

Svar: $x = 1$

Problem 2. Låt x , y och z vara antalet kameler, kor respektive höns som han köpte. Vi får ett ekvationssystem: $x + y + z = 100$, $50x + 10y + z = 500$. Genom att eliminera z , får vi den diofantiska ekvationen: $49x + 9y = 400$, med $SGD(49, 9) = 1$. En lösning hittas genom att använda Euklides algoritm för 49 och 9 och man får $1 = (-2) \cdot 49 + 11 \cdot 9$. Låt $x_0 = -2$, $y_0 = 11$.

Den almäna lösningen är $x = -800 + 9n$, $y = 4400 - 49n$, för alla heltal n . De implicerar också att $z = 100 - x - y = -3500 + 40n$. Eftersom x , y och z måste vara icke negativa, $n \geq 800/9 = 88.8$, $n \leq 4400/49 = 89.7$, $n \geq 3500/40 = 87.5$, som implicerar att $n = 89$. Den motsvarande lösningen blir: $x = 1$, $y = 39$, $z = 60$.

Svar: $x = 1$, $y = 39$, $z = 60$

Problem 3. Talet $5^{n-1} - 4^n + 2 \cdot 3^n - 2^{n+1} + 1$ är delbart med 24 om och endast om det är delbart med 3 och med 8.

Vi kollar först delbarhet med 3. Vi observerar att $5^{n-1} \equiv (-1)^{n-1}$, $4^n \equiv 1^n = 1$, $3^n \equiv 0$, $2^{n+1} \equiv (-1)^{n+1}$. Man får att $5^{n-1} - 4^n + 2 \cdot 3^n - 2^{n+1} + 1 \equiv (-1)^{n-1} - 1 - (-1)^{n+1} + 1 = (-1)^{n-1}(1 - 1) = 0$.

Nu kollar vi delbarheten med 8. Eftersom $n \geq 2$, får vi att 4^n och 2^{n+1} är delbara med 8. Det räcker att visa att $5^{n-1} + 2 \cdot 3^n + 1$ är delbart med 8.

Vi observerar följande:

$$5^{n-1} + 2 \cdot 3^n + 1 \equiv (-3)^{n-1} + 2 \cdot 3^n + 1 = 3^{n-1}((-1)^{n-1} + 6) + 1.$$

Om n udda, dvs. $n = 2m + 1$,

$$3^{n-1}((-1)^{n-1} + 6) + 1 = 3^{2m}(-1 + 6) + 1 \equiv 7 + 1 \equiv 0.$$

Om n jämnt, dvs. $n = 2m$,

$3^{n-1}((-1)^{n-1} + 6) + 1 = 3^{2m-1}(-1 + 6) + 1 \equiv 3 \cdot 5 + 1 \equiv 0$. Här använder vi faktum att $3^{2m-1} = 3^{2(m-1)} \cdot 3 = 9^{m-1} \cdot 3 \equiv 1^{m-1} \cdot 3 = 3$.

Vi har bevisat att $5^{n-1} + 2 \cdot 3^n + 1$ är delbart med 8 som implicerar att $5^{n-1} - 4^n + 2 \cdot 3^n - 2^{n+1} + 1$ är delbart med 8.

Problem 4. Se Vretblad och Ekstig, Lemma 2.14, 2.15, s. 66.

Problem 5. a) Antalet permutationer av de 8 bokstäverna är $8!$. Bokstäverna

T, E och N finns med två gånger var. Varje ord kommer därför att komma med $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ bland permutationerna, eftersom det finns så många sätt att byta plats på T, E eller N. Antalet blir därför

$$8!/8 = 7!.$$

b) Varje ord med 7 bokstäver ger exakt ett ord med 8 bokstäver om man ställer den överblivna bokstaven sist. Svaret blir alltså detsamma som i a), dvs $7!$.

Alternativ lösning: Dela upp i fall efter vilken bokstav som saknas. Om A saknas finns med samma resonemang som i a) $7!/8$ ord, och det finns lika många ord där M saknas. Om T saknas ger ett liknande resonemang $7!/4$ möjligheter, och det finns lika många ord där E eller N saknas. Totala antalet blir alltså

$$7!/8 + 7!/8 + 7!/4 + 7!/4 + 7!/4 = 7!(2/8 + 3/4) = 7!.$$

Problem 6.

Det totala antalet lösningar med x_i heltal och $x_i \geq 0$ är

$$\binom{17+4-1}{4-1} = \binom{20}{3} = 1140$$

(antalet sätt att fördela 17 objekt i 4 lådor). Antalet lösningar med $x_1 \geq 8$ är

$$\binom{9+4-1}{4-1} = \binom{12}{3} = 220$$

(lägg först 8 objekt i första lådan och fördela sedan resterande 9 objekt i 4 lådor). Antalet lösningar med $x_1 \leq 7$ är därför

$$1140 - 220 = 920.$$

Problem 7.

Den karaktäristiska ekvationen är

$$r^2 - 3r - 2 = 0.$$

Lösningarna till den karaktäristiska ekvationen är

$$r_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \quad r_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}.$$

Den allmänna lösningen till ekvationen är därför

$$a_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

Begynnelsevärdena ger

$$Ar_1 + Br_2 = 0 \tag{1}$$

$$Ar_1^2 + Br_2^2 = 1 \tag{2}$$

Första ekvationen ger $B = -Ar_1/r_2$, vilket insatt i andra ekvationen ger

$$A(r_1 - r_2) = 1, \quad A = 1/(r_1\sqrt{17}), \quad B = -1/(r_2\sqrt{17}).$$

Formeln för a_n blir då

$$\begin{aligned} a_n &= (1/r_1\sqrt{17})r_1^n - (1/r_2\sqrt{17})r_2^n = \\ &= (1/\sqrt{17}) \left(\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2} \right)^{n-1} \right) \end{aligned}$$

Problem 8. Binomial koefficienten

$$\binom{m}{k}$$

ger på hur många sätt man kan välja $k+1$ positiva heltal så att det största talet är $m+1$ (de k övriga måste ju då väljas bland $1, 2, \dots, m$). Summan av alla

$$\binom{m}{k}$$

där m löper från k till $k+n-1$ ger alltså antalet sätt att välja $k+1$ positiva heltal så att det största är högst $k+n$, dvs

$$\binom{k+n}{k+1.}$$