

**Kortfattade lösningar till Tentamen,
LMA110, del 1, 23 februari 2011**

1. Om $x < -3$ blir ekvationen $-x - 3 - 3x + 1 = 6$ med roten $x = -2$ som inte uppfyller $x < -3$.

Om $-3 \leq x < \frac{1}{3}$ blir ekvationen $x + 3 - 3x + 1 = 6$ med roten $x = -1$ som uppfyller $-3 \leq x < \frac{1}{3}$.

Om $x > \frac{1}{3}$ blir ekvationen $x + 3 + 3x - 1 = 6$ med roten $x = 1$ som uppfyller $x > \frac{1}{3}$.

Svar: $x = -1$ och $x = 1$

2. (a) Att välja 5 personer från 11 (utan hänsyn till ordningen) går på

$$\binom{11}{5} = 462$$

olika sätt.

Svar: 462

- (b) Antalet kommitéer där ingen man ingår är $\binom{7}{5} = 21$, så det sökta antalet är $462 - 21 = 441$.

Svar: 441

3. Vi har

$$R(x) = \frac{x}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} - 2 = \frac{x+6}{(x-2)(x+2)}.$$

En teckentabell visar att $R(x) > 0$ då $x > 2$ och $-6 < x < -2$.

Svar: $x > 2$ och $-6 < x < -2$

4. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 = 6 - r$ med rötterna $r = 2$ och $r = -3$. Så de allmänna lösningen är $x_n = A2^n + B(-3)^n$. Begynnelsevillkoren ger

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ 2A - 3B = 1 \end{cases}.$$

Detta system har lösningen $A = 2, B = 1$, och alltså gäller $x_n = 2 \cdot 2^n + (-3)^n = 2^{n+1} + (-3)^n$.

Svar: $x_n = 2^{n+1} + (-3)^n$

5. Modulo 10 gäller $n^5 - 11n \equiv n^5 - n$. Så det gäller att visa att $P(n) = n^5 - n$ är 0 är delbart med 2 och 5.

Modulo 2 gäller $P(0) = 0$ och $P(1) = 0$. Så $2 \mid P(n)$ för alla n .

Modulo 5 gäller $P(0) = 0$, $P(1) = 0$, $P(2) = 32 - 2 \equiv 0$, $P(3) \equiv P(-2) = -32 - 20 - 32 \equiv 0$ och $P(4) \equiv P(-1) = -1 + 1 = 0$. Så $5 \mid P(n)$ för alla n .

6. Låt A vara talen som är delbara med 9 och B de som är delbara med 11. Vi skall beräkna $\#A \cup B = \#A + \#B - \#A \cap B$.

Eftersom $1000/9$ är drygt 111 gäller $\#A = 111$. $1000/11$ är drygt 90 så $\#B = 90$. Dessutom består $A \cap B$ av de tal som är delbara med 99. Eftersom $1000/99$ är drygt 10 är $\#A \cap B = 10$.

Så $\#A \cup B = \#A + \#B - \#A \cap B = 111 + 90 - 10 = 191$.

Svar: 191

7. a uppfyller

$$\begin{cases} a \equiv 2 \pmod{25} & (1) \\ a \equiv 3 \pmod{29} & (2) \end{cases}$$

(2) ger $a = 3 + 29n$, $n \in \mathbb{Z}$. Tillsammans med (1) ger detta $3 + 29n \equiv 2 \pmod{25}$, eller, eftersom $29 \equiv 4 \pmod{25}$, $4n \equiv -1 \pmod{25}$. Multiplikation med 6 ger $-n \equiv 24n \equiv -6 \pmod{25}$. Så $n \equiv 6 \pmod{25}$, dvs. $n = 6 + 25k$ för något $k \in \mathbb{Z}$. Vi får $a = 3 + 29n = 3 + 29(6 + 25k) = 177 + 25 \cdot 29k = 177 + 725k$. $k = 0$ ger $a = 177$ och $k = 1$ ger $a = 902$.

Svar: 177 och 902

8. (a) "Streck i räkningen" med 11 ettor och 3 streck ger $\binom{14}{3} = 364$ olika sätt.

Svar: 364

- (b) Att villkoret *inte* är uppfyllt innebär att någon eller några av $k, l, m, n \geq 5$. Låt E_k, E_l, E_m och E_n vara de lösningar där $k \geq 5$, $l \geq 5$, $m \geq 5$ respektive $n \geq 5$. Vi skall beräkna $\#(E_k \cup E_l \cup E_m \cup E_n)$ med inklusion-exklusion.

Vi har $\#E_i = 84$ där $i = k, l, m, n$. (Om vi först lägger 5 ägg i en av korgarna har vi 6 ägg kvar att fördela på 4 korgar. "Streck i räkningen" med 9 ettor och 3 streck ger $\binom{9}{3} = 84$ så $\#E_i = 84$.) För de $\binom{4}{2} = 6$ tvåsnitten gäller $\#(E_i \cap E_j) = \binom{4}{3} = 4$. Eftersom $3 \cdot 5 > 11$ är tresnitten och fyrsnittet tomma och bidrar inte till formeln. Så

$$\#(E_k \cup E_l \cup E_m \cup E_n) = 4 \cdot 84 - 6 \cdot 4 = 312.$$

Det sökta antalet blir alltså $364 - 312 = 52$.

Svar: 52