

**Kortfattade lösningar till Tentamen,
LMA100, del 1**

1. Vi gissar lösningen $x = 1$ skriver om ekvationen som $0 = x^3 + x^2 - 2$ och faktorerisar:

$$0 = (x-1)(x^2+2x+2) = (x-1)((x+1)^2-i^2) = (x-1)(x+1-i)(x+1+i).$$

Vi ser nu att lösningarna är $x = 1$, $x = -1 \pm i$.

Svar: $x = 1$, $x = -1 \pm i$.

2. (a) Här gäller det att välja fyra personer från tolv personer utan hänsyn till ordningen. Så antalet är $\binom{12}{4} = 495$. **Svar:** 495

- (b) En styrelse *utan* män får vi genom att välja fyra kvinnor. Det går på $\binom{8}{4} = 70$ olika sätt. Så det sökta antalet styrelser är $495 - 70 = 425$. **Svar:** 425

3. Uttrycken i absolutbeloppen byter tecken i -2 respektive 2 . Vi delar in i tre fall.

1. $x < -2$. Ekvationen är då $2 - x + 2x + 4 = 1$, som löses av $x = -5$ (som även uppfyller villkoret $x < -2$.)

2. $-2 \leq x < 2$. Ekvationen är då $2 - x - 2x - 4 = 1$, som löses av $x = -1$ (som även uppfyller villkoret $-2 \leq x < 2$.)

3. $2 \leq x$. Ekvationen blir då $x - 2 - 2x - 4 = 1$, som löses av $x = -7$ (som inte uppfyller villkoret $2 \leq x$.)

Svar: $x = -5$ samt $x = -1$.

4. Låt A_k vara de tal mellan 1 och 315 som är delbara med k . Vi skall beräkna $\# A_3 \cup A_5 \cup A_7$. Inklusion-exclusion ger $\# A_3 \cup A_5 \cup A_7 = \# A_3 + \# A_5 + \# A_7 - (\# A_3 \cap A_5 + \# A_3 \cap A_7 + \# A_5 \cap A_7) + \# A_3 \cap A_5 \cap A_7 = \# A_3 + \# A_5 + \# A_7 - (\# A_{15} + \# A_{21} + \# A_{35}) + \# A_{105}$. Eftersom $315 = 3 \cdot 105$, $315 = 5 \cdot 63$, $315 = 7 \cdot 45$, $315 = 15 \cdot 21$, $315 = 21 \cdot 15$, $315 = 35 \cdot 9$ och $315 = 105 \cdot 3$ får vi $\# A_3 \cup A_5 \cup A_7 = 105 + 63 + 45 - (21 + 15 + 9) + 3 = 171$. **Svar:** 171

5. Vi ska visa att $7^{11n+4} + 12^{14n+1} \equiv 0 \pmod{19}$ och observerar att $12 \equiv -7 \pmod{19}$.

Eftersom $14n+1$ är udda ger detta att $12^{14n+1} \equiv (-7)^{14n+1} \equiv -7^{14n+1}$. Vi undersöker potenser av 7 modulo 19 och får

$$7^2 \equiv 11, 7^3 \equiv 77 \equiv 1.$$

Av detta följer nu

$$\begin{aligned} 7^{11n+4} + 12^{14n+1} &\equiv 7^{11n+4} - 7^{14n+1} \equiv 7^{11n+1}(7^3 - (7^3)^n) \equiv \\ &\equiv 7^{11n+1}(1 - 1) \equiv 0 \pmod{19}. \end{aligned}$$

6. Ordet *TENTATAL* består av 3 st. *T*, 2 st. *A* och 1 vardera av *EN* och *L*.

(a) Om vi betraktar *T* och *A* som olika kan vi bilda $8!$ ord. Men de olika orden blir "samma" när vi permuterar *T* och *A* så vi får $8!/3!2! = 3360$ ord. **Svar:** 3360

(b) Vi delar upp i fyra fall.

I. Bara enkla bokstäver. Nu har vi skall vi bild ett ord av fem bokstäver. Det går på $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ sätt.

II. En dubblett (och alltså ingen trippel). Dubbletten kan väljas på 2 sätt. Sedan kan den placeras på $\binom{4}{2} = 6$ sätt. Sen har vi två platser kvar att placera 4 bokstäver. Det går på $4 \cdot 3 = 12$ sätt. Totalt får vi $2 \cdot 6 \cdot 12 = 144$.

III. En trippel (och alltså ingen dubbel). Tre *T* kan placeras på 4 sätt. Sen har vi 4 val för den sista bokstaven. Så det finns $4 \cdot 4 = 16$ sådana här ord.

IV. Två dubletter. Två *T* kan placeras på $\binom{4}{2} = 6$ sätt. Sedan måste vi ha *A* på de sista två platserna. Så det finns 6 sådana här ord.

Totalt får vi $120 + 144 + 16 + 6 = 286$ olika ord.

Svar: 286

7. Se Vretblad.

8. Lösning 1.

De sökta talen kan ha följande form $*00**$, $**00*$, $***00$, $*000*$, $*00*0$, $*0*00$, $**000$, och $*0000$ där $*$ kan vara vilket som helst av talen $1, 2, 3, \dots, 9$. Så antalet tal blir $3 \cdot 9^3 + 4 \cdot 9^2 + 9 = 2520$.

Lösning 2.

Låt O_{23} vara de femsiffriga tal som har en nolla på platserna 2 och 3 (från vänster), O_{235} de tal som har en nolla på platserna 2, 3 och 5, osv. Det sökta antalet är $N = \# O_{23} \cup O_{34} \cup O_{45}$. Men $N = \# O_{23} +$

$$\#O_{34} + \#O_{45} - (\#O_{234} + \#O_{2345} + \#O_{345}) + \#O_{2345} = 3 \cdot 9 \cdot 10^2 - (9 \cdot 10 + 9 + 9 \cdot 10) + 9 = 2520.$$

Lösning 3.

Låt o_n och a_n vara antalet n -siffriga tal som *inte* har två nollor intill varandra och som slutar på 0 respektive inte slutar på 0.

Då gäller $o_2 = 9$ och $a_2 = 9^2 = 81$. Dessutom har vi följande rekursioner

$$\begin{cases} o_{n+1} = a_n \\ a_{n+1} = 9a_n + 9o_n \end{cases}.$$

Detta ger oss följande tabell

n	o_n	a_n
2	9	81
3	81	810
4	810	8019
5	8019	79461

Antalet femsiffriga tal är $9 \cdot 10^4$ och av dessa uppfyller $o_5 + a_5$ inte villkoret. Så det sökta antalet är $9 \cdot 10^4 - (8019 + 79461) = 2520$.

Svar: 2520