

**Kortfattade lösningar till Tentamen,
LMA110, del 1, 24 februari -09**

1. Vi flyttar över till vänster för att ha noll i ena ledet och olikheten blir ekvivalent med

$$\frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x + 5} \geq 0.$$

Täljaren kan faktoriseras genom att gissa en lösning $x = 1$ och division med $x - 1$ ger $x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = (x - 1)(x^2 + 6x + 9) = (x - 1)(x + 3)^2$.

Olikheten är nu ekvivalent med

$$\frac{(x - 1)(x + 3)^2}{x + 5} \geq 0.$$

Täljaren har rötterna 1 och -3. Nämnaren har roten $x = -5$. Teckenstudium ger $x < -5$ och $x \geq 1$.

Svar: $x < -5$ och $x \geq 1$

2. (a)

Vi skall välja 6 personer från 12 utan hänsyn till ordning. Det går på $\binom{12}{6} = 924$ sätt.

Svar: 924

- (b)

Vi delar upp i tre fall.

I. 2 kvinnor. De 2 kvinnorna kan väljas på $\binom{4}{2}$ sätt, de 4 männen på $\binom{8}{4}$ sätt. Så det finns $\binom{4}{2}\binom{8}{4}$ sådana kommitéer.

II. 3 kvinnor. De 3 kvinnorna kan väljas på $\binom{4}{3}$ sätt, de 3 männen på $\binom{8}{3}$ sätt. Så det finns $\binom{4}{3}\binom{8}{3}$ sådana kommitéer.

III. 4 kvinnor. Kvinnorna kan väljas på 1 sätt, de 2 männen på $\binom{8}{2}$ sätt. Så det finns $\binom{8}{2}$ sådana kommitéer.

Totalt får vi $\binom{4}{2}\binom{8}{4} + \binom{4}{3}\binom{8}{3} + \binom{8}{2} = 672$ olika kommitéer.

Svar: 672

3. Vi bevisar först delbarhet med 6. Eftersom $6 = 2 \cdot 3$ och $\text{SGD}(2, 3) = 1$, räcker det att visa delbarhet med 2 och 3.

Fermats lilla sats ger $n^2 \equiv n \pmod{2}$, som implicerar $n^3 \equiv n^2 \equiv n \pmod{2}$. Vi har $n^3 + 3n^2 \equiv 4n \equiv 0 \pmod{2}$ och $14n - 12 \equiv 0 \pmod{2}$.

Delbarhet med 3 använder igen Fermats lilla sats: $n^3 \equiv n \pmod{3}$. Vi har $n^3 + 3n^2 + 14n - 12 \equiv n + 14n = 15n \equiv 0 \pmod{3}$.

Antag att n är jämnt. Vi skall visa delbarhet med 12. Det räcker att visa delbarhet med 4 eftersom vi redan vet att talet är delbart med 3.

Man observerar att $n^3, n^2, 14n$ är delbara med 4 om $n = 2m$ och dessa implicerar att talet $n^3 + 3n^2 + 14n - 12$ är delbart med 4.

4. (a)

TA kan placeras på 4 sätt. Sen återstår det att placera 6 bokstäver på 3 platser vilket går på $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ sätt. Så det finns $4 \cdot 120 = 480$ ord med TA .

Svar: 480

- (b)

Vi börjar med att placera TA . Vi har två fall.

I. TA står på plats 1&2 eller plats 4&5. Då kan vi sen placera IS på 2 sätt. Till sist skall vi välja en av 4 bokstäver på den sista platsen. Totalt får vi $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ sådana ord.

II. TA står på plats 2&3 eller plats 3&4. Då kan IS bara placeras på 1 sätt och sen kan vi välja den sista bokstaven på 4 sätt. Totalt får vi $2 \cdot 1 \cdot 4 = 8$ sådana ord.

Så det finns alltså $24 + 8 = 32$ ord med TA och IS .

Lösningvariant. Vi kan välja "den sista" bokstaven på 4 sätt och placera den på 3 sätt (på plats 1, 3 eller 5). Sen har vi 2 val att placera TA och IS (TA före IS eller IS före TA). Så vi har $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ ord med TA och IS .

Svar: 24

5. Vi observerar först att x måste satisfiera $x \geq -1$ och $x \leq 4$. Kvadrering av ekvationen ger $x + 1 = 5 - x + 2\sqrt{4 - x}$. Ekvivalent, $x - 2 = \sqrt{4 - x}$. Vi observerar nu att $x \geq 2$. Genom att kvadrera igen, har vi ekvationen $(x - 2)^2 = 4 - x$ som är ekvivalent med $x^2 - 3x = 0$. Rötterna är $x_1 = 0$ och $x_2 = 3$. Eftersom $2 \leq x \leq 4$, får vi endast en lösning $x_2 = 3$.

Svar: $x = 3$

6. (a)

Antalet sätt gotttegrisarna kan välja praliner är detsamma som antalet konfigurationer

$$1\ 1\ 1 \mid 1\ 1\ 1 \mid 1 \mid 1\ 1\ 1$$

Streck i räkningen med 10 ettor och 3 streck ger antalet $\binom{13}{3} = 286$.

Svar: 286

(b)

Att villkoret *inte* är uppfyllt innebär att någon får minst 4 kakor. Låt E_1, E_2, E_3 och E_4 vara händelserna att Iulia, Jan-Alve, Hans respektive Hasse får minst 4 praliner var. Då ger inklusion-exklusion att

$$\#E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 = S_1 - S_2 + S_3 - S_4.$$

Nu gäller $S_1 = \#E_1 + \#E_2 + \#E_3 + \#E_4 = 4\#E_1$.

För att beräkna $\#E_1$ ger vi först Iulia får 4 praliner. Sen återstår det 6 praliner att fördela. Streck i räkningen ger $\#E_1 = \binom{9}{3} = 84$ så $S_1 = 336$.

$S_2 = \#E_1 \cap E_2 + \dots + \#E_3 \cap E_4$. På samma sätt som ovan gäller $\#E_k \cap E_l = \binom{5}{3}$ och S_2 består av $\binom{4}{2}$ sådana termer. Alltså gäller $S_2 = \binom{4}{2} \binom{5}{3} = 60$.

$S_3 = S_4 = 0$ eftersom inte 3 personer kan få 4 praliner när det bara finns 10 totalt.

Så antalet där villkoret inte är uppfyllt är $S_1 - S_2 = 336 - 60 = 276$. Det sökta antalet är alltså $286 - 276 = 10$.

Svar: 10

7. Antag först att a har en invers b modulo n . Det gäller att $ab - 1 = nk$, där k är ett heltal. Om $\text{SGD}(a, n) = d$ så $d|a$ och $d|n$. Vi har $d|ab$ och $d|nk$. Dessa implicerar $d|ab - nk = 1$ och $d = 1$.

Antag nu att $\text{SGD}(a, n) = 1$. Enligt Euklides algoritm, finns heltalen b och k som satisfierar $1 = ab + nk$. Detta implicerar $ab \equiv 1 \pmod{n}$, som visar att a har en invers b modulo n .

8. Detta följer av lådprincipen. Lådorna är $L_1 = \{0\}$, $L_2 = \{1, 7\}$, $L_3 = \{2, 6\}$, $L_4 = \{3, 5\}$ och $L_5 = \{4\}$. Observera att alla resterna vid division med åtta, $0, 1, \dots, 7$ ligger i någon låda och att summan av elementen i låda L_2, L_3 och L_4 är 8.

Ett tal n med resten r vid division med 8 stoppas i den låda som innehåller r . Eftersom det finns fler tal (6) än lådor (5) måste minst

två tal hamna i samma låda. Om de två talen har samma rest så är deras skillnad delbar med 8, om de har olika rest är deras summa delbar med 8.

(Om resten är 0 eller 4 så är både summan och skillnaden delbar med 8.)