

**Kortfattade lösningar till Tentamen,
LMA110, del 1, 26 februari -08**

1. Vi flyttar över till vänster för att ha noll i ena ledet och skriver på gemensamt bråkstreck:

$$\frac{8x(2x+3) - 6x(2x-3) - (2x-3)(2x+3)}{2(2x-3)(2x+3)} > 0.$$

Ekvivalent

$$\frac{42x+9}{2(2x-3)(2x+3)} > 0.$$

Man observerar att täljaren blir noll när $x = -3/14$ och att bråket är ej definierat när $x = 3/2$ eller $x = -3/2$. Tecken studium ger att olikheten gäller när $-3/2 < x < -3/14$ och $x > 3/2$.

Svar: $-3/2 < x < -3/14$ och $x > 3/2$

2. Ordet *LÄRARNA* består av 2 st. *R* och *A* och 1 vardera av *L*, *Ä* och *N*.

- (a) Om vi betraktar *R* och *A* som olika kan vi bilda $7!$ ord. Men de olika orden blir "samma" när vi permuterar *T* och *A* så vi får $7!/2!2! = 1260$ ord. **Svar:** 1260

- (b) Vi delar upp i tre fall.

I. Bara enkla bokstäver. Nu skall vi bilda ett ord av fem bokstäver. Det går på $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ sätt.

II. En dubblett. Dubbletten kan väljas på 2 sätt och kan placeras på $\binom{4}{2} = 6$ sätt. Sen har vi två platser kvar att placera 4 bokstäver. Det går på $4 \cdot 3 = 12$ sätt. Totalt får vi $2 \cdot 6 \cdot 12 = 144$.

III. Två dubletter. Två *R* kan placeras på $\binom{4}{2} = 6$ sätt. Då är platserna för *A* bestämda så det finns 6 ord med två dubletter. Totalt får vi $120 + 144 + 6 = 270$ olika ord.

Svar: 270

3. (a) Eftersom $15 = 3 \cdot 5$ och $\text{SGD}(3, 5) = 1$, räcker det att visa att talet är delbart med 3 och 5.

Enligt Fermats lilla sats, vet vi att $n^3 \equiv n \pmod{3}$, som ger $n^4 \equiv n^2 \pmod{3}$ och $n^5 \equiv n \pmod{3}$. Vi har $n^5 - 5n^3 + 4n \equiv 0 \pmod{3}$ och

$10n^4 + 5n^2 \equiv 15n^2 \equiv 0 \pmod{3}$. Alltså är $n^5 + 10n^4 - 5n^3 + 5n^2 + 4n$ delbart med 3.

För att bevisa delbarhet med 5, använder vi igen Fermats lilla sats: $n^5 \equiv n \pmod{5}$ som ger att $n^5 + 4n \equiv 0 \pmod{5}$. Självklart har vi att $10n^4 - 5n^3 + 5n^2$ är delbart med 5. Beviset är klart.

- (b) Euklides algoritmen ger: $1789 = 29 \cdot 61 + 20$ och $61 = 3 \cdot 20 + 1$. Vi har $1 = 61 - 3(1789 - 29 \cdot 61) = -3 \cdot 1789 + 88 \cdot 61$. Räkning modulo 1789 ger att $88 \cdot 61 \equiv 1 \pmod{1789}$. Den multiplikativa inversen till 61 blir t.ex. 88 (eller $88 + 1789n$, för godtyckligt heltal n).

Svar: 88

4. (a) Vi väljer först ut de 7 personerna i kommitén. Det går på $\binom{13}{7}$ sätt. Sen väljer vi från dessa 7 ut de 3 som skall ingå i det verkställande utskottet. Det går på $\binom{7}{3}$ sätt. Totalt får vi

$$\binom{13}{7} \binom{7}{3} = 858 \cdot 35 = 60060.$$

Svar: 60060

- (b) Vi tänker oss att vi har en förening med n medlemmar som skall utse en kommitté på m personer och av dessa skall k ingå i VU. Vi kan bestämma antalet sätt vi kan göra detta på två sätt.
I. Med samma resonemang som i (a) ser vi att antalet blir

$$\binom{n}{m} \binom{m}{k}.$$

II. Vi väljer först de k personerna som ingår i VU. Det går på $\binom{n}{k}$ sätt. Då finns $n - k$ personer kvar från vilka vi väljer ytterligare $m - k$ att ingå i styrelsen. Det går på $\binom{n-k}{m-k}$ sätt. Totalt får vi

$$\binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}$$

olika sätt.

Eftersom $\binom{n}{m} \binom{m}{k}$ och $\binom{n}{k} \binom{n-k}{m-k}$ är svar på samma fråga är de lika.

5. Vi gör substitutionen $e^x = z$. Ekvationen blir ekvivalent med $z^3 + 4z^2 - z - 4 = 0$. Observera att $z = 1$ satisfierar ekvationen. Faktorsatsen ger $(z - 1)(z^2 + 5z + 4) = 0$. Ekvivalent $(z - 1)(z + 1)(z + 4) = 0$. Sådet finns ytterligare två lösningar, $z = -1$ och $z = -4$. Men eftersom $z = e^x$ är positiv, måste $z = 1$ och $x = 0$.

Svar: $x = 0$.

6. (a) Kakmonstren tar först två kakor var. Sedan slås de om de 7 kakor som är kvar. Antalet sätt det kan resultera i är detsamma som antalet konfigurationer

$$1\ 1\ 1 \mid 1\ 1\ 1 \mid 1$$

Streck i räkningen med 7 ettor och två streck ger antalet $\binom{9}{2} = 36$.

Svar: 36

- (b) Om vi struntar i villkoret finns det $\binom{15}{2} = 105$ sätt att fördela kakorna. Att villkoret *inte* är uppfyllt innebär att någon får minst 7 kakor. Antalet fördelningar där ett visst kakmonster får minst 7 kakor är $\binom{8}{2} = 28$. (Efter att kakmonstret fått 7 kakor återstår det 6 kakor att fördela.) Så det sökta antalet är $105 - 3 \cdot 28 = 21$.

Svar: 21

7. Om $p|a$ är vi klara. Om p inte delar a , har vi att $\text{SGD}(a, p) = 1$. Enligt Euklides algoritmen, kan vi hitta heltal x och y sådana att $px + ay = 1$. Multiplikation med b ger $pxb + aby = b$. Eftersom $p|ab$, har vi $p|aby$. Självklart $p|pxb$. Slutsatsen är $p|b$.

8. (a) Vi delar upp i tre fall.

I. Ingen rektangel. Det finns bara en sådan gång.

II. Med en rektangel. Rektangeln kan placeras på 4 sätt och mönstras på 3 sätt. Sedan är "allt" bestämt så det finns 12 sådana gånger.

III. Med två rektanglar. Rektanglarna kan placeras på 3 sätt och mönstras på $3^2 = 9$ sätt. Kvadraten kan väljas på ett sätt. Så det finns $3 \cdot 9 = 27$ sådana här gånger.

Totalt finns det alltså $1 + 12 + 27 = 40$ olika gånger.

Svar: 40

- (b) Låt p_n vara det sökta antalet gånger. Då gäller $p_1 = 1$ och $p_2 = 4$ (det finns 1 gång med två kvadrater och 3 med en rektangel). Dessutom gäller rekursionen $p_{n+2} = p_{n+1} + 3p_n$. Ty man kan börja på 1 sätt att lägga en kvadrat och sedan fortsätta med en godtycklig $n + 1$ -gång, eller så kan man börja på 3 sätt att lägga en rektangel och sedan fortsätta med en godtycklig n -gång. Så vi har

$$\begin{cases} p_1 = 1, p_2 = 4 \\ p_{n+2} = p_{n+1} + 3p_n \end{cases}$$

(c) Från (b) får vi följande tabell

n	p_n
1	1
2	4
3	7
4	19
5	40
6	97
7	217
8	508
9	1159

Svar: 1159

Anm. Lösningen till (a) följer också av denna tabell.