

**Kortfattade lösningar till Tentamen,
LMA110, del 1, 30 april 2011**

1. Eftersom $(|x| - 1)(|x| + 1) = |x|^2 - 1 = x^2 - 1$ får vi $x^2 - 1 = 1$ eller $x^2 = 2$. Så $x = \pm\sqrt{2}$.

Svar: $x = \pm\sqrt{2}$

2. (a) Vi väljer ut 3 av 6 våningar och placerar de röda klossarna där. Så antalet blir $\binom{6}{3} = 20$.

Svar: 20

- (b) Vi delar upp i 2 fall.

I. Med tre röda. Som i (a) blir antalet 20.

II. Med två röda. Dessa kan placeras på $\binom{6}{2} = 15$ sätt.

Så det finns totalt $20 + 15 = 35$ torn

Svar: 35

3. Prövning med ± 1 och ± 3 visar att $x = -1$ är en rot. Division med $x + 1$ ger $x^3 - 2x^2 + 3 = (x + 1)(x^2 - 3x + 3)$. Nu gäller $x^2 - 3x + 3 = 0$ när

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Svar: -1 och $-\frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}$

4. (a) Antalet är $\frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$.

Svar: 180

- (b) Vi delar upp i fall.

I. Med 2A och 2B:

Antalet är $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$.

II. Med (precis) en dubbel:

Dubbeln kan väljas på 2 sätt och placeras på $\binom{4}{2} = 6$ sätt. Sen har vi kvar att placera 3 bokstäver på 2 platser, vilket går på $3 \cdot 2 = 6$ sätt. Så det finns 72 ord med en dubbel.

III. Ingen dubbel. Fyra bokstäver skall placeras på 4 platser vilket går på $4! = 24$ sätt.

Så totalt finns det $6 + 72 + 24 = 102$ ord med fyra bokstäver.

Svar: 102

5. Modulo 9 gäller

$$13^{57} = (9+4)^{57} \equiv 4^{57} = 4^{3 \cdot 19} = (4^3)^{19} = 64^{19} = (7 \cdot 9 + 1)^{19} \equiv 1^{19} = 1.$$

Svar: 1

6. Om vi bortser från det sista kravet finns det $\binom{18}{5}$ kommittéer.

Låt D_0 , I_0 , N_0 och S_0 vara de kommittéer som saknar danskar, islänningar, norrmän respektive svenskar.

Inklusion-exklusion ger att antalet kommittéer som *inte* uppfyller villkoret, dvs. saknar någon nationalitet, är

$$\#D_0 \cup I_0 \cup N_0 \cup S_0 = S_1 - S_2 + S_3.$$

Nu är $S_1 = \#D_0 + \#I_0 + \#N_0 + \#S_0$. Av symmetriskäl är $S_1 = 2\#D_0 + 2\#I_0 + 2\#N_0 + 2\#S_0$, och $\#D_0 = \binom{13}{5}$ och $\#N_0 = \binom{14}{5}$.

Vidare är $S_2 = \#D_0 \cap I_0 + \#D_0 \cap N_0 + \#D_0 \cap S_0 + \#I_0 \cap N_0 + \#I_0 \cap S_0 + \#N_0 \cap S_0$. Av symmetriskäl är $S_2 = \#D_0 \cap I_0 + 4\#D_0 \cap N_0 + \#N_0 \cap S_0 = \binom{8}{5} + 4\binom{9}{5} + \binom{10}{5}$.

Slutligen är $S_3 = \#D_0 \cap I_0 \cap N_0 + \#D_0 \cap I_0 \cap S_0 + \#D_0 \cap N_0 \cap S_0 + \#I_0 \cap N_0 \cap S_0 = 2\#D_0 \cap I_0 \cap N_0 + 2\#D_0 \cap N_0 \cap S_0 = 0 + 2$.

Det sökta antalet kommittéer blir alltså

$$\binom{18}{5} - S_1 + S_2 - S_3 = \binom{18}{5} - 2\left(\binom{13}{5} + \binom{14}{5}\right) + \binom{8}{5} + 4\binom{9}{5} + \binom{10}{5} - 2 = 2800.$$

Svar: 2800

7. Euklides algoritmen ger

$$\begin{aligned} 57 &= 4 \cdot 13 + 5 \\ 13 &= 2 \cdot 5 + 3 \\ 5 &= 3 + 2 \\ 3 &= 2 + 1 \end{aligned}$$

Så $\text{SGD}(13, 57) = 1$ och

$$1 = 3 - 2 = 3 - (5 - 3) = 2 \cdot 3 - 5 = 2(13 - 2 \cdot 5) - 5 =$$

$$2 \cdot 13 - 5 \cdot 5 = 2 \cdot 13 - 5(57 - 4 \cdot 13) = 22 \cdot 13 - 5 \cdot 57.$$

Alltså är $x_0 = 44 \cdot 22 = 968$, $y_0 = 44 \cdot (-5) = -220$ en lösning. Den allmänna lösningen blir

$$\begin{aligned} x &= 968 + 57n \\ y &= -220 - 13n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Variant. Man "ser" att $x = -1$, $y = 1$ är en lösning. Så den allmänna lösningen blir

$$\begin{aligned}x &= -1 + 57n \\y &= 1 - 13n\end{aligned}, n \in \mathbb{Z}.$$

Svar: $x = 968 + 57n$, $y = -220 - 13n$ eller $x = -1 + 57n$, $y = 1 - 13n$

8. (a) "Streck i räkningen" ger att äpplena kan fördelas på $\binom{8}{3}$ sätt (5 ettor, 3 streck). "Streck i räkningen" ger att päronen kan fördelas på $\binom{7}{3}$ sätt (4 ettor, 3 streck). Så antalet blir $\binom{8}{3}\binom{7}{3} = 1960$.

Svar: 1960

- (b) Dela in i fall efter fördelningen av päron.

I. $3 + 1 + 0 + 0$: Personen som får tre päron kan väljas på 4 sätt, och den som får ett på 3 sätt. Denna person får ett äpple, och de resterande äpplena ges till de två som inte fått några päron. Så antalet blir 12.

II. $2 + 2 + 0 + 0$: De två personerna som får päronen kan väljas på $\binom{4}{2}$ sätt. De övriga två får två äpplen var. Sedan finns det 1 äpple att fördela. Det går på 4 sätt. Så antalet blir 24.

III. $2 + 1 + 1 + 0$: Personen som får två päron kan väljas på 4 sätt. De två som får ett päron kan väljas på $\binom{3}{2}$ sätt. Dessa två får var sitt äpple, och den fjärde personen 2 äpplen. Sedan finns det 1 äpple att fördela, vilket går på 4 sätt. Så antalet blir 48.

IV. $1 + 1 + 1 + 1$: Ge ett päron till vardera personen. Sedan får de dessutom var sitt äpple. Sedan kan det sista äpplet fördelas på 4 sätt. Så antalet blir 4.

Totalt finns det alltså $12 + 24 + 48 + 4 = 88$ olika sätt att fördela frukterna.

Svar: 88