

**Kortfattade lösningar till Tentamen,
LMA110, del 1, 6 april -09**

1. (a) Ekvationen är ekvivalent med

$$10(x-2)(x+2) - (x+1)x(x+2) + (x-1)x(x-2) = 0.$$

Alltså

$$4x^2 - 40 = 0$$

som har lösningarna $x_1 = -\sqrt{10}$ och $x_2 = \sqrt{10}$.

Svar: $x_1 = -\sqrt{10}$ och $x_2 = \sqrt{10}$.

- (b) Ekvationen är ekvivalent med

$$4 \cdot 2^x - \frac{1}{2} \cdot 2^x = 7\sqrt{2}.$$

Sätt $z = 2^x$. Vi har $4z - \frac{1}{2}z = 7\sqrt{2}$ som implicerar $z = 2\sqrt{2} = 2^{\frac{3}{2}}$ och $x = 3/2$.

Svar: $x = 3/2$.

2. (a) Streck i räkningen med 9 ettor och 2 streck ger att antalet är $\binom{11}{2} = 55$.

Svar: 55

(b) Vi kan tänka på problemet att ge tre personer nio likadana kulor så att den förste får högst 5 kakor. Komplementet till detta är att den förste skall ha minst 6 kakor. Vi ger först honom dessa 6, sen återstår det att fördela 3 kakor. Som i (a) blir detta antal $\binom{5}{2} = 10$. Det sökta antalet är alltså $55 - 10 = 45$.

Svar: 45

3. Vi har $\text{SGD}(252, 343) = 7$. Efter division med 7, blir ekvationen ekvivalent med $36x + 49y = 21$ och $\text{SGD}(36, 49) = 1$. Med hjälp av Euklides algoritm hittar man en lösning till ekvationen $36x + 49y = 1$, t.ex. $x_0 = 15$, $y_0 = -11$.

En lösning till ekvationen $36x + 49y = 21$ är $x_1 = 21x_0 = 315$, $y_1 = 21y_0 = -231$. Den allmänna lösningen ges av $x = 315 + 49n$, $y = -231 - 36n$, för alla heltal n .

Svar: $x = 315 + 49n$, $y = -231 - 36n$, för alla heltal n .

4. Vi delar in i fall.

I. Högst ett E och högst ett L. Vi skall bilda treord av fyra bokstäver vilket går på $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ sätt.

II. Två E och högst ett L. Två E kan placeras på $\binom{3}{2} = 3$ sätt. Sedan har vi 3 bokstäver kvar att placera på den sista platsen. Så det finns 9 sådana här ord.

III. Två L och högst ett E. Som i II finns det 9 sådana här ord.

IV. Två E och två L går inte.

Så det sökta antalet ord är $24 + 2 \cdot 9 = 42$.

Svar: 42

5. Låt x vara talet som vi söker. Eftersom x ger rest 4 vid division med 29, kan vi skriva $x = 4 + 29k_1$, k_1 heltal. Vi har $4 + 29k_1 \equiv 3 \pmod{23}$ som implicerar $6k_1 \equiv -1 \pmod{23}$. Multiplikation med 4 (som är invers till 6 modulo 23) ger $k_1 \equiv 19 \pmod{23}$. Vi skriver $k_1 = 19 + 23k_2$, där k_2 är heltal. Detta implicerar $x = 4 + 29(19 + 23k_2) = 555 + 667k_2$. Eftersom x ger rest 2 vid division med 3, får man att $k_2 \equiv 2 \pmod{3}$. Låt $k_2 = 2 + 3k_3$, k_3 heltal. Detta implicerar $x = 555 + 667(2 + 3k_3) = 1889 + 2001k_3$. Det minsta positiva x är 1889.

Svar: 1889.

6. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - r - 2 = 0$ med rötterna 2 och -1 . Så den allmänna lösningen är $x_n = A2^n + B(-1)^n$. Begynnelsevillkoren ger

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A - B = 1 \end{cases}.$$

Adderar vi dessa ekvationer får vi $3A = 2$ så $A = \frac{2}{3}$ och $B = \frac{1}{3}$. Detta ger

$$x_n = \frac{2}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n = \frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n).$$

Svar: $\frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n)$

7. Om $p|a$ är vi färdiga. Antag nu att p inte delar a . Eftersom p inte har några andra positiva delare än 1 och p gäller $\text{SGD}(p, a) = 1$. Enligt Euklides algoritm, kan man hitta heltal x och y sådana att $1 = xp + ya$. Multiplikation med b ger $b = xpb + yab$. Vi vet att ab är delbart med p och vi får att p delar $xpb + yab = b$, dvs. $p|b$.

8. Det finns $5! = 120$ femsiffriga tal överhuvudtaget.

Att villkoret att inte någon siffra skall stå på "sin plats" *inte* är uppfyllt betyder att någon siffra står på sin plats. Låt $E_1 = \{1 \text{ står på plats } 1\}$, ..., $E_5 = \{5 \text{ står på plats } 5\}$. För att beräkna $\#E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5$ använder vi inklusion-exklusion. Vi har $\#E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5$.

Nu gäller $\#E_i = 4!$ och det finns 5 sådana termer i S_1 . Alltså gäller $S_1 = 5 \cdot 4! = 120$.

S_2 består av $\binom{5}{2}$ termer av typ $E_i \cap E_j$ och $\#E_i \cap E_j = 3!$. Alltså har vi $S_2 = \binom{5}{2}3! = 60$.

På liknande sätt får vi $S_3 = \binom{5}{3}2! = 20$, $S_4 = \binom{5}{4}1! = 5$ och $S_5 = 1$.

Detta ger $\#E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 = 120 - 60 + 20 - 5 + 1 = 76$ och det sökta antalet ord blir $120 - 76 = 44$.

Svar: 44