MATEMATIK
Göteborgs universitet
TW

7 oktober 2005, 8.30-13.30
Inga hjälpmedel
Telefon: Jonas Hartwig, 0762-72 18 61

Tentamensskrivning i LMA200
Geometri och linjär algebra 2

1. Låt $\mathbf{u} = (1\ \ 3\ \ 2)^t$, $\mathbf{v} = (-2\ \ -1\ \ 1)^t$ och $\mathbf{w} = (-3\ \ 1\ \ -7)^t$. Beräkna volymen av den parallellepiped som $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ spänner upp. Bildar $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ ett höger- eller vänstersystem?

2. (a) Bestäm alla gemensamma punkter till de tre planen
   $x - 2y - 3z = -7,\ 3x - y + z = 4$ och $2x + y + 4z = 11$.

   (b) Bestäm alla gemensamma punkter till de tre planen
   $x - 2y - 3z = -7,\ 3x - y + z = 4$ och $2x + y + 4z = 3$.

   (c) Beskriv geometrin i (a) och (b). (4p)

3. Undersök om vektorerna $(1\ \ 2\ \ 3)^t$, $(4\ \ 5\ \ 6)^t$ och $(7\ \ 8\ \ 9)^t$ är linjärt beroende. Ange i så fall en icke-trivial linjärkombination av dem som är $\mathbf{0}$.

4. Bestäm inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -7 \end{pmatrix}$.

5. Låt A vara en $m \times n$-matris och $\mathbf{b}$ en m-vektor. Betrakta det homogena ekvationssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{1}$$

   och det inhomogena ekvationssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2}$$

   (a) Visa att om $\mathbf{x}_p$ är en lösning till (2) och $\mathbf{x}_h$ är en lösning till (1) så är $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$ en lösning till (2).

   (b) Visa att om $\mathbf{x}_1$ och $\mathbf{x}_2$ är lösningar till (2) så är $t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ lösning till (1) för varje $t \in \mathbb{R}$.

6. Låt l_1 vara linjen $y = x$ och l_2 vara linjen $y = -x$. För en godtycklig vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, låt $\mathbf{v}_1$ resp. $\mathbf{v}_2$ vara dess projektioner på l_1 resp. l_2. Beräkna $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ och verifiera att $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

7. Vi vet att matrisen för spegling i linjen med riktningsvinkel α är $S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$ och att matrisen för rotation vinkeln θ är $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

   (a) Visa att sammansättningen av två speglingar, $S_\alpha S_\beta$, är en rotation och bestäm rotationsvinkeln.

   (b) När gäller $S_\alpha S_\beta = S_\beta S_\alpha$?

8. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Varje uppgift utom nr. 2 ger max 3 poäng.
För godkänt krävs 11 poäng, för väl godkänt 18 poäng av 25.

Tentan beräknas vara färdigrättad tisdagen den 18 oktober kl 12.30, varefter resultat kan fås på tel. 772 3509. Tentor kan hämtas i mottagningsrummet varje vardag 12.30–13.00.