MATEMATIK
Göteborgs universitet
TW

6 oktober 2006, 8.30-13.30
Inga hjälpmedel
Telefon: Marcus Sundhäll, 0762-72 18 61

Tentamensskrivning i LMA200
Geometri och linjär algebra 2

1. Enhetskuben i $\mathbb{R}^3$ är den som spänns upp av standardbasvektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Beräkna volymen av dess bild under avbildningen med matris $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ -7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. (a) Bestäm alla gemensamma punkter till de tre planen
$x - 2y + 3z = 4,\ 3x + y - 5z = -9$ och $2x - 4y + 6z = 8\,.$
   (b) Bestäm alla gemensamma punkter till de tre planen
$x - 2y + 3z = 4,\ 3x + y - 5z = -9$ och $2x - 4y + 6z = 9\,.$
   (c) Bestäm alla gemensamma punkter till de tre planen
$x - 2y + 3z = 4,\ 3x + y - 5z = -9$ och $2x - 4y + 7z = 9\,.$

3. Visa att vektorerna $(2\ \ 4\ \ 4)^t$, $(3\ \ 4\ \ -2)^t$ och $(3\ \ 5\ \ 2)^t$ är linjärt beroende och ange en icke-trivial linjärkombination av dem som är $\mathbf{0}$.

4. Bestäm inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

5. Minns att om $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ är vektorer i $\mathbb{R}^2$ så är $\det(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ determinanten med $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ som kolonner.

   Låt nu $\mathbf{a}$, $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^2$ som uppfyller $x\mathbf{u} + y\mathbf{v} = \mathbf{a}$. Visa att då gäller
$x \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{v})$.

6. För en godtycklig vektor $\mathbf{u} = (x\ \ y\ \ z)^t$, bestäm dess projektion $P\mathbf{u}$ på linjen med riktningsvektor $\mathbf{v} = (1\ \ -2\ \ 2)^t$. Visa också att $\mathbf{u} - P\mathbf{u}$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$.

7. Visa att matrisen $S = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ är en ON-matris och att $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en egenvektor till S med egenvärdet 1.

8. Bestäm alla egenvärden till matrisen $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}$. Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara egenvektorer till var sitt egenvärde och bestäm s och t så att $s\mathbf{u} + t\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Beräkna vad som händer med $A^n \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ då $n \to \infty$. (4p)

Varje uppgift utom nr. 8 ger max 3 poäng.
För godkänt krävs 11 poäng, för väl godkänt 18 poäng av 25.

Tentan beräknas vara färdigrättad tisdagen den 17 oktober kl 10, varefter resultat kan fås på tel. 772 3500. Tentor kan hämtas på MV:s expedition varje vardag 8.30–13.00.