LMA200 Geometri och linjär algebra 2   7 okt 05

1. $|\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w}| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 10 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & -11 \end{vmatrix} = -55$

$2 \quad 3 \qquad -2$

så volymen är 55 och $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ bildar ett vänstersystem.

2. a) och b) kan lösas samtidigt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -7 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & a \end{array}\right) -3\ \ -2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -7 \\ 0 & 5 & 10 & 25 \\ 0 & 5 & 10 & a+14 \end{array}\right) -1\ \ \tfrac{2}{5}\ \ \tfrac{1}{5} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a-11 \end{array}\right)$$

så systemet är lösbart $\Longleftrightarrow a = 11$ som i a).

Lösningen är då $(x, y, z) = (3, 5, 0) + t(-1, -2, 1)$.

c) I a) skär planen varandra längs en linje, i b) skär planen varandra parvis längs tre räta linjer, alla med riktningsvektor $(-1, -2, 1)$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} -2\ \ -3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} -2\ \ \tfrac{4}{3}\ \ \tfrac{-1}{3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ så

$x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t$ och vektorerna är linj. beroende.

4. (Nästan ingen såg att det är samma matris som i uppg. 1.)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) -3\ \ -2 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) -1 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 55 \\ 11 \\ -5 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 55 & -110 & -165 & 55 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 110 & -33 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 55 & -5 & 5 & -5 \end{array}\right) -2\ \ 3 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 55 & -110 & 0 & 40 & 15 & -15 \\ 0 & 55 & 0 & -23 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 55 & -5 & 5 & -5 \end{array}\right) 2 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 55 & 0 & 0 & -6 & 17 & 5 \\ 0 & 55 & 0 & -23 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 55 & -5 & 5 & -5 \end{array}\right)$$ så inversen är $\frac{1}{55}\begin{pmatrix} -6 & 17 & 5 \\ -23 & 1 & 10 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix}$.

5. Lättaste uppgiften men näst minst poäng utdelade.

a) Om $A\vec{x}_p = \vec{b}$ och $A\vec{x}_h = \vec{0}$ så $A(\vec{x}_p + \vec{x}_h) = A\vec{x}_p + A\vec{x}_h = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$.

b) Om $A\vec{x}_1 = \vec{b}$ och $A\vec{x}_2 = \vec{b}$ så $A(t(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)) = tA(\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = t(A\vec{x}_2 - A\vec{x}_1) =$
$= t(\vec{b} - \vec{b}) = t \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

6. $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är normerad riktningsvektor för l_1 och $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ för l_2. Projektionen av $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ på l_1 ges därför av $(\vec{v} \cdot \vec{a})\vec{a} = \frac{1}{2}(x+y)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} & \frac{x+y}{2} \end{pmatrix}^t = \vec{v}_1$ och på l_2 av $(\vec{v} \cdot \vec{b})\vec{b} = \frac{1}{2}(x-y)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{2} & \frac{y-x}{2} \end{pmatrix}^t = \vec{v}_2$. Vidare är
$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} & \frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2} \end{pmatrix}^t = (x \ \ y)^t = \vec{v}$.

1) Man kan också använda att de båda projektionerna ges av matrisen $P_1 = \vec{a}\vec{a}^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ resp. $P_2 = \vec{b}\vec{b}^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ så $\vec{v}_1 = P_1\vec{v}$ och $\vec{v}_2 = P_2\vec{v}$. $P_1 + P_2 = I$ ger $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}$.

2) P_1 och P_2 kan också erhållas som $I - \vec{b}\vec{b}^t$ resp. $I - \vec{a}\vec{a}^t$ eftersom $\vec{b}$ är normalvektor till l_1 och $\vec{a}$ till l_2.

7. Sämsta poängutdelningen!

a) $S_\alpha S_\beta = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\alpha \sin 2\beta & \cos 2\alpha \sin 2\beta - \sin 2\alpha \cos 2\beta \\ \sin 2\alpha \cos 2\beta - \cos 2\alpha \sin 2\beta & \sin 2\alpha \sin 2\beta + \cos 2\alpha \cos 2\beta \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \cos 2(\alpha-\beta) & -\sin 2(\alpha-\beta) \\ \sin 2(\alpha-\beta) & \cos 2(\alpha-\beta) \end{pmatrix} = R_{2(\alpha-\beta)}$

b) $S_\alpha S_\beta = S_\beta S_\alpha \Longleftrightarrow 2(\alpha-\beta) = 2(\beta-\alpha) + n \cdot 2\pi \Longleftrightarrow \alpha - \beta = n \cdot \frac{\pi}{2}$

För jämna n betyder detta att S_α och S_β är spegling i samma linje så $S_\alpha S_\beta = I$ $(= R_{2k\pi})$, för udda n att man speglar i två vinkelräta linjer och att resultatet blir vridning ett halvt varv. Pröva själv med att ställa två speglar i rät vinkel och se din spegelbild.

8. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda-4)(\lambda+1)$; egenvärden 4, −1.

$\underline{\lambda = 4}$: $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ egenvektorer $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$.

$\underline{\lambda = -1}$: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ egenvektorer $t\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$.