LMA200 Geometri och linjär algebra 2, 6 okt 2006

1. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ -7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 10 \\ -7 & -6 & 23 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -7 & -6 & 11 \end{vmatrix} = -55$ så volymen är 55 eftersom matrisens kolonner är bilderna av $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ och $\vec{e}_3$.

(1) (-3) (2)

2. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -5 & -9 \\ 2 & -4 & a & b \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 & -2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & -14 & -21 \\ 0 & 0 & a-6 & b-8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & a-6 & b-8 \end{pmatrix}$

a) $(x,y,z) = (-2,-3,0) + t(1,2,1)$
b) Ingen lösning
c) $(x,y,z) = (-1,-1,1)$.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -8 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ T.ex. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $3\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 & -2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -14 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 7 \\ \\ \cdot 7 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & -14 & 21 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -14 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & -3 \end{matrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 7 & -14 & 0 & 49 & 0 & -21 \\ 0 & 7 & 0 & -31 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -13 & 2 & 7 \\ 0 & 7 & 0 & -31 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 7 & -14 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ Inversen är $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -13 & 2 & 7 \\ -31 & 1 & 14 \\ -14 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

5. $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{a} \Rightarrow \det(\vec{a},\vec{v}) = \det(x\vec{u} + y\vec{v}, \vec{v}) = (\text{linearitet}) =$
$= x\det(\vec{u},\vec{v}) + y\det(\vec{v},\vec{v}) = (\text{två lika} \Rightarrow 0) = x\det(\vec{u},\vec{v})$.

6. Enhetsriktningsvektor är $\vec{w} = \vec{v}/|\vec{v}| = \frac{1}{3}(1\ \ -2\ \ 2)^t$
så projektionen är $P\vec{u} = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{w} = \frac{1}{9}(x - 2y + 2z)(1\ \ -2\ \ 2)^t$.
Vidare gäller $(\vec{u} - P\vec{u})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} - (\vec{u}\cdot\vec{w})\underbrace{\vec{w}\cdot\vec{w}}_{=1} = 0$, så
$\vec{u} - P\vec{u}$ är ortogonal mot $\vec{w}$ och alltså mot $\vec{v}$.

7. $|\text{kolonn } 1|^2 = \frac{1}{81}(49 + 16 + 16) = 1$

$|\text{kolonn } 2|^2 = |\text{kolonn } 3|^2 = \frac{1}{81}(16 + 1 + 64) = 1$

$(\text{kolonn } 1)\cdot(\text{kolonn } 2) = \frac{1}{81}(28 + 4 - 32) = 0$

$(\text{kolonn } 1)\cdot(\text{kolonn } 3) = \frac{1}{81}(-28 + 32 - 4) = 0$

$(\text{kolonn } 2)\cdot(\text{kolonn } 3) = \frac{1}{81}(-16 + 8 + 8) = 0$

$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 14+8-4 \\ 8+2+8 \\ -8+16+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8. $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0{,}8-\lambda & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1{,}7\lambda + 0{,}7 = (\lambda - 1)(\lambda - 0{,}7)$

$A - I = \begin{pmatrix} -0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & -0{,}1 \end{pmatrix}$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $A - 0{,}7I = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = 3 \\ t = 2 \end{matrix}$ | $A^n(3\vec{u} + 2\vec{v}) = 3A^n\vec{u} + 2A^n\vec{v} =$
$= 3\cdot 1^n\vec{u} + 2\cdot 0{,}7^n\vec{v} \xrightarrow[n\to\infty]{} 3\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.