LMA210 Linjär algebra 6 okt 2007

2. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & a & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 4 & a-3 & b-21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & a-5 & b-9 \end{array}\right)$

a) Om $a=5$, $b=11$ visar sista raden att lösning saknas.

b) Om $a=4$, $b=11$ så $z=-2$, $y=-2$, $x=7$.

c) Om $a=5$, $b=9$ så kan z väljas fritt.
$z=2t$ ger $y=-3-t$, $x=4-3t$

1. Matrisen med dessa vektorer som kolonner är densamma som koefficientmatrisen i uppg. 2 och lösningarna där visar att a) är ett vänstersystem medan b) innehåller linjärt beroende vektorer.

3. 2b) visar att $7\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\8\\11\end{pmatrix}$ är den enda lösningen och att vektorerna är linjärt oberoende.

4. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 4 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 4 & -2 \end{array}\right)$ Svar: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

5. b) Eftersom systemet har mer än en lösning har det oändligt många.

a) $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow 0 = A\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$

så $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ är lösning för alla t

6. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & -1 \\ -4 & -5 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim$

$\sim \begin{pmatrix} 0 & 10 & -10 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Egenvektor t.ex. $\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$

7. Vi söker c och s med $c^2+s^2=1$ sådana att $\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8c - s \\ c + 8s \end{pmatrix}$, ekv.system med matris

$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & -1 & 4 \\ 1 & 8 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -65 & -52 \\ 1 & 8 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} s = 4/5 \\ c = 7 - 8\cdot 4/5 = 3/5 \end{cases}$

och vi har $(4/5)^2 + (3/5)^2 = 1$ så matrisen är $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.
Att det fungerar beror på att $\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$ är lika långa.

8. $S = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{pmatrix}$ $\quad S - \lambda I = \begin{pmatrix} 0.6-\lambda & 0.8 \\ 0.8 & -0.6-\lambda \end{pmatrix}$

$\det(S-\lambda I) = \lambda^2 - 0.36 - 0.64 = \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1.$
Egenvektorerna för egenvärdet 1 avbildas på sig själva medan de för egenvärdet -1 speglas i linjen vinkelrät mot egenvektorerna för -1, m.a.o. i egenlinjen för egenvärdet 1.

$S - I = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.8 \\ 0.8 & -1.6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ egenvektorer $t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, t \neq 0$

$S + I = \begin{pmatrix} 1.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ egenvektorer $t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, t \neq 0$

Enhetsegenvektorer är $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ resp. $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

och speglingslinjen är $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.