MATEMATIK
Göteborgs universitet
TW

3 oktober 2008, 8.30-13.30
Inga hjälpmedel
Telefon: Ragnar Freij, 0762-72 18 61

Tentamensskrivning i LMA210
Linjär algebra

1. Beräkna volymskalan under avbildningen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ med matris $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Är avbildningen orienteringsbevarande, dvs. avbildar den högersystem på högersystem?

2. Bestäm alla gemensamma punkter till de tre planen
   (a) $x + 2y + z = -2,\ 3x + 2y - 3z = -4$ och $2x + 2y - z = -3$.
   (b) $x + 2y + z = -2,\ 3x + 2y - 3z = -4$ och $2x + 2y - z = 3$.
   (c) $x + 2y + z = -2,\ 3x + 2y - 3z = -4$ och $2x + 2y + z = 3$.
   (d) Beskriv geometrin i (a), (b) och (c). (4p)

3. Ange alla linjärkombinationer av vektorerna $(1\ \ 3\ \ 2)^t$, $(2\ \ 2\ \ 2)^t$ och $(1\ \ -3\ \ -1)^t$ som är $(8\ \ -2\ \ 3)^t$.

4. Bestäm inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Låt $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vara lösningar till ett ekvationssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där A är matrisen $(\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{w})$, dvs. $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ är kolonnvektorerna. Uttryck $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ som linjärkombinationer av $\mathbf{b}$ och $\mathbf{u}$.

6. Visa att -2 är ett egenvärde till matrisen $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ och bestäm en egenvektor till det egenvärdet.

7. Vi vet att matrisen för spegling i linjen med riktningsvinkel α är $S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$ och att matrisen för rotation vinkeln θ är $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
   (a) Visa att i xy-planet ger spegling i x-axeln följd av spegling i linjen $y = x$ en rotation och bestäm rotationsvinkeln.
   (b) Vilken rotationsvinkel får man om man gör dessa speglingar i motsatt ordning?

8. Bestäm alla egenvärden till matrisen $A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{pmatrix}$. Bestäm en egenvektor till vardera egenvärdet. Låt $\mathbf{x} = (5\ \ -5)^t$ och beräkna $A^n\mathbf{x}$ för alla n.

Varje uppgift utom nr. 2 ger max 3 poäng.
För godkänt krävs 11 poäng, för väl godkänt 18 poäng av 25.

Tentan återlämnas torsdagen den 16 oktober kl 15.00 i sal Euler.
Efter detta kan resultat även fås på tel. 772 3500 och tentor kan hämtas på MV:s expedition varje vardag 8.30–13.00.