LMA210 Linjär algebra 3 okt 2008

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & 8 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -8$ så volymskalan är 8 och orienteringen vänds.
$(-2)\ (-1)$

2. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & a & b \end{array}\right) (-3)\ (-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & a-2 & b+4 \end{array}\right) \left(-\tfrac{1}{2}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & a-2 & b+4 \end{array}\right) (1)\ (-1) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 & b+3 \end{array}\right)$

a) $a=-1,\ b=-3$
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $a=-1,\ b=3$
Ingen lösning

c) $a=1,\ b=3$
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) De två första planen skär varandra längs linjen i a). I a) innehåller även det tredje planet den linjen, medan i b) det tredje planet är parallellt med men disjunkt från den linjen; i c) skär det tredje planet linjen i en punkt (som ges av $t = 3/2$).

3. $\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

ett ekvationssystem med totalmatris

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) (-3)\ (-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -4 & -6 & -26 \\ 0 & -2 & -3 & -13 \end{array}\right) (-2)\ (1)\ (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{array}\right)$

så koefficienterna i linjärkombinationen ges av $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 13/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. $(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) (3)\ (2) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) (-1) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) (\cdot 4) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & -12 & 12 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) (-8)\ (3)\ (2) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 0 & 0 & -8 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 & 9 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 8 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right) = 8(I|A^{-1})$

5. Förutsättningen ger $\vec{b} = \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$ (1)
och $\vec{b} = 3\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ (2)

(1)+(2) ger $2\vec{b} = -2\vec{u} - \vec{v}$ så $\vec{v} = -2\vec{b} - 2\vec{u}$ vilket insatt i (2) ger $\vec{w} = -\vec{b} - 3\vec{u} + \vec{v} = -3\vec{b} - 5\vec{u}$.

(Uppg. 2a) är ett exempel på denna situation, men i uppg. 5 kan $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{b}$ ligga i godtyckligt $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.)

6. Att $\vec{v}$ är en egenvektor till A med egenvärdet λ är detsamma som att $\vec{v}$ är en icke-trivial lösning till det homogena ekvationssystemet med koefficientmatris $A - \lambda I$. Här skall vi alltså lösa systemet med matris

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} - (-2)I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (se 2a) och 3)

så en icke-trivial lösning är $\vec{v} = (4\ \ -3\ \ 2)^t$.

7. Spegling i x-axeln ges av $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$ medan spegling i $y=x$ ges av $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ vilket man ser direkt eller m.h.j.a. uttrycket för S_α med $\alpha = 0$ resp. $\frac{\pi}{4}$; matriserna är $S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ resp. $S_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (vilket få kanske syns allra enklast genom att kolonnerna är bilderna av $\vec{e}_1$ och $\vec{e}_2$).

a) $S_{\frac{\pi}{4}} S_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R_{\frac{\pi}{2}}$ (90° moturs)

b) $S_0 S_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = R_{-\frac{\pi}{2}}$ (90° medurs)

8. $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0.6-\lambda & 0.8 \\ 0.8 & -0.6-\lambda \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 0.36 - 0.64 = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$

$\underline{\lambda=1}$ $\quad A - I = \begin{pmatrix} -0.4 & 0.8 \\ 0.8 & -1.6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ egenvektor t.ex. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{\lambda=-1}$ $\quad A + I = \begin{pmatrix} 1.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ egenvektor t.ex. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

A är en spegling med speglingslinje $\vec{x} = t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$ så $A^2 = I$ vilket också givetvis syns genom direkt uträkning. Alltså $A^{2k} = I$ och $A^{2k-1} = A$ för alla positiva heltal k,

så $A^n \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}, & n \text{ jämnt} \\ \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}, & n \text{ udda.} \end{cases}$

<u>Anm.</u> Man kan också använda $\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{u} + 3\vec{v}$,

så $A^n \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = A^n\vec{u} + 3A^n\vec{v} = \vec{u} + (-1)^n 3\vec{v} = \begin{cases} \vec{u} + 3\vec{v}, & n \text{ jämnt} \\ \vec{u} - 3\vec{v}, & n \text{ udda.} \end{cases}$