MATEMATIK
Göteborgs universitet
TW

6 oktober 2009, 8.30-13.30
Inga hjälpmedel
Telefon: Jonatan Vasilis, 0762-72 18 61

Tentamensskrivning i LMA210
Linjär algebra

1. Låt $\mathbf{u} = (2\ \ 2\ \ -1)^t, \mathbf{v} = (3\ \ 1\ \ 1)^t$ och $\mathbf{w} = (2\ \ 5\ \ -1)^t$.
   (a) Beräkna arean av den parallellogram som $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ spänner upp.
   (b) Beräkna volymen av den parallellepiped som $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ spänner upp.
   (c) Beräkna höjden i den parallellepipeden från spetsen av $\mathbf{w}$ (m.a.o. avståndet från $\mathbf{w}$:s spets till planet som $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ spänner upp). (4p)

2. (a) Bestäm alla gemensamma punkter till de tre planen
   $2x + 3y + z = 4,\ 2x + y - 2z = 0$ och $-x + y + 2z = 3$.
   (b) Bestäm alla gemensamma punkter till de tre planen
   $2x + 3y + z = 4,\ 2x + y - z = 0$ och $-x + y + 2z = 3$.
   (c) Bestäm alla gemensamma punkter till de tre planen
   $2x + 3y + z = -1,\ 2x + y - z = 0$ och $-x + y + 2z = 3$.

3. Ange alla icke-triviala linjärkombinationer av vektorerna $(2\ \ 2\ \ -1)^t$, $(3\ \ 1\ \ 1)^t$ och $(1\ \ -1\ \ 2)^t$ som är $\mathbf{0}$.

4. Bestäm inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. Låt A vara en 2×2-matris för vilken gäller $A\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ och $A\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$.
   Visa att $\det A = 0$.

6. Visa att $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ är en egenvektor till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ och bestäm motsvarande egenvärde.
   Bestäm även matrisens övriga egenvärden.

7. Motivera att det finns en rotationsmatris som avbildar vektorn $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$ och bestäm den matrisen. Ge också ett ungefärligt värde på rotationsvinkeln.

8. En projektionsmatris är en kvadratisk matris P med egenskapen $P^2 = P$.
   (a) Visa att om $b \neq 0$ så är $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{a-a^2}{b} & 1-a \end{pmatrix}$ en projektionsmatris.
   (b) Låt I vara enhetsmatrisen av typ 2×2. Visa att även $I - A$ är en projektionsmatris.
   (c) Visa att det alltid gäller att om P är en projektionsmatris och I är enhetsmatrisen av samma typ, så är även $I - P$ en projektionsmatris.

Varje uppgift utom nr. 1 ger max 3 poäng.
För godkänt krävs 11 poäng, för väl godkänt 18 poäng av 25.

Tentan återlämnas torsdagen den 22 oktober kl 9 i MVF31.

Därefter kan resultat fås på tel. 772 3500. Tentor kan hämtas på MV:s expedition varje vardag 8.30–13.00.