LMA210 Linjär algebra 6 okt 2009

1. a) Arean $= |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta = |\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{9+25+16} = \sqrt{2\cdot 25} = 5\sqrt{2}$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+1\\-3-2\\2-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-5\\-4\end{pmatrix}$$

b) Volymen $= |(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}| = \left|\begin{pmatrix}3\\-5\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}\right| = |6-25+4| = 15$

c) Höjden $= \dfrac{\text{volymen}}{\text{basarean}} = \dfrac{15}{5\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

2. $$\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&1&b\\2&1&a&0\\-1&1&2&3\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \\ 2\;\;-1\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}0&5&5&b+6\\0&3&a+4&6\\1&-1&-2&-3\end{array}\right)\begin{array}{c}-\frac{3}{5}\;\;\frac{1}{5}\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&(b+6)/5\\0&0&a+1&(-3b+12)/5\\1&0&-1&(b-9)/5\end{array}\right)$$

a) $a=-2$, $b=4$
$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&2\\0&0&-1&0\\1&0&-1&-1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&2\\0&0&1&0\\1&0&0&-1\end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

b) $a=-1$, $b=4$
$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&2\\0&0&0&0\\1&0&-1&-1\end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

c) $a=-1$, $b=-1$ Rad 2 blir $(0\ 0\ 0\,|\,3)$; ingen gemensam punkt.

3. Räkningarna i 2b) ger ~~att~~ $x(2\ 2\ -1)^t + y(3\ 1\ 1)^t + z(1\ -1\ 2)^t = \vec{0}$
$\iff (x\ y\ z) = (t\ -t\ t)$; icke-trivial $\iff t\neq 0$.

4. $$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&3&2&1&0&0\\2&1&5&0&1&0\\-1&1&-1&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{c}2\;\;-1\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}0&5&0&1&0&2\\0&3&3&0&1&2\\1&-1&1&0&0&-1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}0&15&0&3&0&6\\0&15&15&0&5&10\\15&-15&15&0&0&-15\end{array}\right)\begin{array}{c}-1\;\;1\end{array} \sim$$

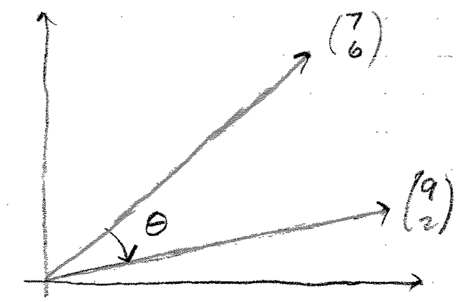
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}0&15&0&3&0&6\\0&0&15&-3&5&4\\15&0&15&3&0&-9\end{array}\right)\begin{array}{c}-1\end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}0&15&0&3&0&6\\0&0&15&-3&5&4\\15&0&0&6&-5&-13\end{array}\right)$$ så Inversen är $\frac{1}{15}\begin{pmatrix}6&-5&-13\\3&0&6\\-3&5&4\end{pmatrix}$

5. Förutsättningarna ger $A\begin{pmatrix}1&5\\4&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-4\\-3&6\end{pmatrix}$.
Produktsatsen ger $(\det A)\cdot(-19) = 0$, så $\det A = 0$.
(Man kan också beräkna $A = \begin{pmatrix}2&-4\\-3&6\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-19}\begin{pmatrix}1&-5\\-4&1\end{pmatrix} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix}-18&14\\27&-21\end{pmatrix}$)

6. $$\begin{pmatrix}2&3&2\\2&1&5\\-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\9\\-6\end{pmatrix} = (-3)\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$$ så -3 är egenvärdet.

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&3&2\\2&1-\lambda&5\\-1&1&-1-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda)+4-15+2(1-\lambda)+6(1+\lambda)-5(2-\lambda) =$$
$$= -\lambda^3+2\lambda^2+10\lambda-15 = -(\lambda+3)(\lambda^2-5\lambda+5),$$

vi vet ju nollstället $\lambda=-3$, övriga är $\lambda = \dfrac{5\pm\sqrt{25-20}}{2} = \frac{1}{2}(5\pm\sqrt{5})$.

7. 

Vektorernas belopp är lika:
$\sqrt{7^2+6^2} = \sqrt{49+36} = \sqrt{85} = \sqrt{81+4} = \sqrt{9^2+2^2}$

Rotationsmatrisen är $\begin{pmatrix}c&-s\\s&c\end{pmatrix}$ $\quad c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$

så $\begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c&-s\\s&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7c-6s\\6c+7s\end{pmatrix}$

vilket ger $(49+36)c = 63+12$ så $c = \frac{75}{85} = \frac{15}{17}$
och $s = \frac{1}{6}\left(7\cdot\frac{15}{17}-9\right) = \frac{105-153}{6\cdot 17} = -\frac{48}{6\cdot 17} = -\frac{8}{17}$.

$\frac{8}{17}$ är något mindre än $\frac{1}{2} = \sin 30^\circ$ så rotationen är något mindre än 30° i negativ led, vilket också syns i figuren. (Exakt vinkel $\arcsin\frac{8}{17}$.)

8. a) $$\begin{pmatrix}a&b\\\frac{a-a^2}{b}&1-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\\frac{a-a^2}{b}&1-a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2+a-a^2 & a\cdot b+b\cdot(1-a)\\ \frac{a-a^2}{b}\cdot a+(1-a)\cdot\frac{a-a^2}{b} & a-a^2+(1-a)^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\\frac{a-a^2}{b}&1-a\end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a&b\\\frac{a-a^2}{b}&1-a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-a&-b\\\frac{a-a^2}{-b}&a\end{pmatrix}$$ som är $= \begin{pmatrix}c&d\\\frac{c-c^2}{d}&1-c\end{pmatrix}$,

en matris av samma form som i a), om vi sätter
$c = 1-a$ och $d=-b$ (ty $c-c^2 = (1-a)-(1-a)^2 = a-a^2$).

c) $P^2 = P \implies (I-P)^2 = (I-P)\cdot(I-P) = I-P-P+P^2 =$
$= I-P-P+P = I-P$.

(b) följer förstås av c).)