Tentamen i LMA210 Statistik för lärare

Fredag 12 november 2010 kl 8.30-12.30, sal V.
Examinator: Magnus Röding.
Jour: Magnus Röding, tel nr 0733-932195 alt. 031-7723556.
Hjälpmedel: Formelsamling och fördelningstabeller som delas ut tillsammans med tentamenstesen, valfri miniräknare samt ett A4-ark med egna handskrivna anteckningar (får vara dubbelsidigt).
Gränser: Maximal poäng är 30. För godkänd krävs 12 poäng och för väl godkänd 21 poäng. Eventuella bonuspoäng från duggan i sannolikhetsteori den 2/11 2010 adderas till tentamensresultatet.
Observera att lösningar och motiveringar ska redovisas till varje uppgift, att denna tentamenstes är flersidig, samt att uppgifter inte är ordnade efter svårighetsgrad.
Tentamen är rättad senast efter 3 veckor.

---

1. Låt X vara en stokastisk variabel sådan att $P(X = 1) = c$ och $P(X = 0) = 1 - c$ för något c mellan 0 och 1.
   (a) Bestäm $V(X)$ uttryckt i c. (1p)
   (b) Bestäm $E[2^X]$ uttryckt i c. (1p)
   (c) Bestäm $E[X^3]$ uttryckt i c. (1p)

2. Låt A och B vara händelser i något utfallsrum Ω.
   (a) Visa att Boole's olikhet , $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$, gäller för alla A och B. (2p)
   (b) Låt $A \subseteq B$, alltså alla utfall i A ligger också i B. Visa att $P(A) \leq P(B)$. (2p)
   (c) Låt A och B vara oberoende. Visa att även komplementära händelserna A^c och B^c är oberoende, genom att visa att $P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$. (2p)

3. Anta att vi har en Geiger-Müller-räknare med vars hjälp vi räknar antal radioaktiva sönderfall per minut i ett litet radioaktivt materialprov. Vi upprepar detta tio gånger, och får då ett stickprov med tio oberoende observationer $X_1, X_2, ..., X_{10}$. Det är rimligt att anta att antalet sönderfall är Poissonfördelat. Anta att alla tio observationer är utfall av en stokastisk variabel $X \sim \text{Po}(\lambda)$, för någon okänd intensitet λ. Man kan skatta den okända λ som
$$\hat{\lambda} = \frac{X_1 + ... + X_{10}}{10}. \tag{1}$$
   (a) Anta att de observerade värdena $x_1, ..., x_{10}$ är 1, 4, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1 och 1. Skatta λ. (1p)
   (b) Visa att skattaren $\hat{\lambda}$ är väntevärdesriktig, alltså att $E[\hat{\lambda}] = \lambda$. (1.5p)

(c) Beräkna variansen av skattaren, alltså $V(\hat{\lambda})$. (1.5p)

(d) Anta att skattningen $\hat{\lambda}$ i (a) är det riktiga värdet på λ, och ange då sannolikheten att inte observera några sönderfall under en minut. (1p)

4. Anta att 1 på 10000 har en ovanlig sjukdom. Vi väljer ut en person slumpmässigt och vill kontrollera om personen är frisk eller sjuk. Vi har ett test som med 99 % sannolikhet ger rätt svar, vare sig personen är sjuk eller inte. Anta att testet ger positivt utslag, det vill säga enligt testet är personen sjuk. Hur stor är då sannolikheten att personen faktiskt är sjuk? (4p)

5. Bland Göteborgs kanske 100000 studenter (du får anta att det är oändligt många, så det spelar ingen roll) så väljs 100 ut på måfå och får frågan om de brukar cykla till skolan. 34 svarar ja. Konstruera ett 95 % konfidensintervall för andelen studenter som cyklar till skolan. (4p)

6. Vi mäter spänningen i ett eluttag i väggen, som antas ligga på (i medeltal) 240 volt, fem gånger och får resultaten 240.6, 238.4, 241.2, 240.0 och 240.2 volt. Det är rimligt att anta att observationerna är normalfördelade. Ange ett 99 % konfidensintervall för väntevärdet av dessa observationer. Talar observationerna emot att spänningen är 240 volt? (4p)

7. (a) På ett europeiskt institut för trafiksäkerhet mätte man upp minsta stoppsträcka i meter som en viss bilmodell behöver efter olika antal månaders användning. Mätningar gjordes efter 9, 15, 24, 30, 38, 46, 53, 60, 64 och 76 månader, och minsta uppmätta stoppsträcka var i respektive fall 28.4, 29.3, 37.6, 36.2, 36.5, 35.3, 36.2, 44.1, 44.8, 47.2 meter. Korrelationskoefficienten mellan två variabler X och Y definieras som

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sigma_X \sigma_Y}. \qquad (2)$$

Genom att skatta väntevärde och standardavvikelse på vanligt sätt, och genom att skatta $E[XY]$ som $\frac{1}{n}\sum x_i y_i$, skatta värdet på korrelationskoefficienten. Anta att X svarar mot antal månader (vilket säkert inte är helt slumpmässigt, men man brukar bortse från sådant när man beräknar korrelation), och anta att Y svarar mot stoppsträckan i meter. (2p)

(b) Visa att för två stokastiska variabler X och Y sådana att $Y = aX$, där $a > 0$, så är $\rho(X,Y) = 1$. (2p)

Lycka till!