(LMA210)

Statistik för Lärare ht 2008
Första omtentamen

Måndag 12 januari, 2009, kl: 8.30-13.30, sal V.
Examinator och jour: ANNA RUDVIK, 772 5338
Hjälpmedel: Formelsamling som delas ut tillsammans med tentamenstesen och valfri miniräknare utan anteckningar som berör kursen.
Max: 30p, Godkänd: 12p, Väl Godkänd: 21p.

OBS!: Lösningar skall redovisas till varje uppgift.
OBS!: Text på två sidor.
OBS!: Uppgifterna ej ordnade efter svårighetsgrad.
OBS!: Även ofullständiga lösningar kan ge vissa poäng

Rättningen är färdig senast 3 veckor efter tentamen.

---

1. Antag att antalet hjortar som springer igenom ett visst skogsparti en dag är Poissonfördelat med parameter 4.4.

   (a) (1.5p.) Vad är sannolikheten att högst 3 hjortar springer igenom under dag?

   (b) (1.5p.) Givet att det springer igenom 3 eller 5 hjortar under en dag, vad är den betingade sannolikheten att det springer igenom 5 hjortar?

2. Låt A och B vara händelser sådana att $P(A) = 0.25$ och $P(B) = 0.55$.

   (a) (1p.) Beräkna $P(A \cap B)$ om A och B är oberoende.

   (b) (1p.) Beräkna $P(A \cup B)$ om A och B är oberoende.

   (c) (1p.) Beräkna $P(A \cap B)$ om A och B är oförenliga (disjunkta).

   (d) (1p.) Beräkna $P(A \cup B)$ om A och B är oförenliga (disjunkta).

3. (a) (2p.) Formulera och bevisa lagen om total sannolikhet.

   (b) (2p.) Visa beräkningsformeln för varians, dvs visa att $V(X) = E[X^2] - (E[X])^2$. Välj själv om du vill göra det diskreta, kontinuerliga, eller allmänna fallet.

4. Antag att den kontinuerliga stokastiska variabeln X har sannolikhetstäthet cx^{-2} för $3 \leq x \leq 5$ (och 0 utanför detta intervall). Här är c en konstant.

   (a) (2p.) Bestäm c och beräkna standardavvikelsen för X.

   (b) (2p.) Vilken sannolikhetstäthet har X^{-2}?

5. (3p.)Antag att Y är binomialfördelad med parametrar $n = 1200$ och $p = 0.72$. Beräkna approximativt $P(Y \leq 825)$. Vad heter den sats som motiverar att man kan göra den approximation som du gör?

6. (3p.) Man jämför två olika maskiner för att läsa in streck-koder i en butik. Man mäter hur många streck-koder som kan läsas in på en sekund av de olika maskinerna. Man väljer stickprovsstorlekarna $n_x = 51$, $n_y = 51$. Man observerar stickprovsmedelvärdena $\bar{x} = 40$ och $\bar{y} = 29$, samt stickprovsvarianserna $s_x^2 = 24.9$ och $s_y^2 = 22.7$. Beräkna ett 90% konfidensintervall för skillnaden mellan väntevärdena av antalet streck-koder som kan läsas in per sekund av de bägge maskinerna. Vad drar du för slutsats av intervallet?

7. (3p.) En urna innehåller 3 gröna kulor och 6 blå kulor. En annan urna innehåller 5 gröna kulor och 4 blå kulor. Man drar utan återläggning två kulor från den ena urnan, och två kulor från den andra urnan. Vad är sannolikheten att man får lika många gröna kulor från bägge urnorna?

8. Låt (X, Y) vara en diskret tvådimensionell slumpvariabel med tvådimensionell simultan sannolikhetsfunktion som ges enligt $p_{XY}(1, 1) = 0.2$, $p_{XY}(1, 2) = 0.15$, $p_{XY}(2, 1) = 0.30$, $p_{XY}(2, 2) = 0.35$.

   (a) (1p.) Beräkna $E[5X - 8Y]$.

   (b) (2p.) Beräkna $E[X^Y]$.

9. (3p.) En person kastar pil. Avståndet från pilens träffpunkt till mittpunkten på tavlan sägs vara exponentialfördelad med parameter λ. Ett kast bedöms vara "bra" om avståndet blir mindre än $1/(2\lambda)$. Personen bestämmer sig för att kasta tills han får sitt första bra kast. Beräkna sannolikheten att personen behöver fler än 4 kast.

Formelsamling (*Statistik för Lärare*)

Diskreta fördelningar

Fördelning	Sannolikhetsfunktion	Väntevärde	Varians	Användning
Bernoulli, (p)	$p_X(k) = \begin{cases} p & , k = 1, \\ 1-p & , k = 0 \end{cases}$	p	$p(1-p)$	Ett försök so antigen lyckas e ler misslyckas
Binomial, (n, p)	$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$	np	$np(1-p)$	Antalet lyckad då n stycken lik dana (oberoend försök utförs.
Hyp.geom, (N, n, p)	$p_X(k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}$, $0 \leq k \leq Np$, $0 \leq n-k \leq N(1-p)$	np	$np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$	Vi drar n stycke utan återläggnin från en ändli population a storlek N, dä Np stycken ha en viss egenska och räknar an talet med denn egenskap son finns bland d dragna.
Likformig, (N)	$p_X(k) = \frac{1}{N}$, $1 \leq k \leq N$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{(N+1)(N-1)}{12}$	
ffg, (p)	$p_X(k) = p(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	Antalet försö t.o.m. det först lyckade, all försök är lika oc har samma slh, p att lyckas.
Poisson, (λ)	$p_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$	λ	λ	Används nä något sker med en viss frekvens under ett givet intervall. T. ex. tryckfel per sida.

Kontinuerliga fördelningar

Fördelning	Täthetsfunktion	Fördelningsfunktion	Väntevärde	Varians	Användning
Likformig, (a, b)	$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$, $a \leq x \leq b$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	
Exponential, (β)	$f_X(x) = \frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}}$, $x \geq 0$	$1 - e^{-\frac{x}{\beta}}$	β	β^2	Livslängder
Normal, (μ, σ)	$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x < \infty$		μ	σ^2	Läng, Vikt

För $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$ gäller

$$\mathbb{P}\{X \leq x\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

där $\Phi(\cdot)$ är fördelningsfunktionen för standard normal (d.v.s. $\mu = 0$ och $\sigma = 1$).
$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Approximationer

$$\mathrm{Bin}\ (n,p) \quad \approx \quad \begin{cases} \mathrm{N}(np, \sqrt{np(1-p)}) & , \ np(1-p) > 10, \\ \mathrm{Poi}(np) & , \ p < 0.1, \ np(1-p) \approx np. \end{cases}$$

$$\mathrm{Hyp}\ (N,n,p) \quad \approx \quad \left\{ \mathrm{N}(np, \sqrt{np(1-p)\tfrac{N-n}{N-1}}) \quad , \ np(1-p)\tfrac{N-n}{N-1} > 10. \right.$$

Centrala Gränsvärdessatsen

Låt $X_1, X_2, X_3, \ldots$ vara en följd av oberoende stokastiska variabler med samma sannolikhetsfördelning s.a. $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ och $\mathrm{V}(X) = \sigma^2$ för alla i. Då gäller

$$\mathbb{P}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right\} \to \Phi(x), \ \text{då } n \to \infty.$$

Punktskattning

$$\begin{aligned}
\overline{X} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\
S^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right) \\
S_p^2 &= \frac{(n_x-1)S_x^2 + (n_y-1)S_y^2}{n_x + n_y - 2} \\
R &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - n\overline{XY}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2)(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\overline{Y}^2)}}
\end{aligned}$$

Konfidensintervall

- Andel i oändlig population: $I_p = \hat{p} \pm \lambda_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$
- Andelsskillnad i oändlig population: $I_{p_2-p_1} = \hat{p}_2 - \hat{p}_1 \pm \lambda_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$
- Andel i ändlig population: $I_p = \hat{p} \pm \lambda_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}\frac{N-n}{N-1}}$
- Andelsskillnad i ändlig population: $I_{p_2-p_1} = \hat{p}_2 - \hat{p}_1 \pm \lambda_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}\frac{N_1-n_1}{N_1-1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}\frac{N_2-n_2}{N_2-1}}$
- Väntevärde (σ känd): $I_\mu = \hat{\mu} \pm \lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- Väntevärdesskillnad (samma varians): $I_{\mu_2-\mu_1} = \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1 \pm \lambda_{\alpha/2}\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$
- Väntevärde (σ okänd): $I_\mu = \hat{\mu} \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}$
- Väntevärdesskillnad (samma varians): $I_{\mu_2-\mu_1} = \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1 \pm t_{n_1+n_2-2,\alpha/2}s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$
- Stickprov-i-par: $I_\Delta = \hat{\Delta} \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{s_z}{\sqrt{n}}$

Hypotesprövning

Under $H_0 : p = p_0$ (alternativt $p_1 = p_2$, $\mu = \mu_0$, $\mu_y = \mu_x$, $\rho = 0$ etc.) gäller:

$$X \sim \text{Bin}(n,p) \implies T_p = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \sim_{\text{appr.}} \text{N}(0,1)$$

$$X \sim \text{Hyp}(M,n,p) \implies T_p = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}\frac{N-n}{N-1}}} \sim_{\text{appr.}} \text{N}(0,1)$$

$$X \sim \text{Bin}(n_1,p_1), Y \sim \text{Bin}(n_2,p_2) \implies T_{p_2-p_1} = \frac{\hat{p}_2 - \hat{p}_1}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}} \sim_{\text{appr.}} \text{N}(0,1)$$

$$X \sim \text{N}(\mu,\sigma) \implies T_\mu = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \text{N}(0,1)$$

$$X \sim \text{N}(\mu,\sigma) \implies T_\mu = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

$$X \sim \text{N}(\mu_x,\sigma),\ Y \sim \text{N}(\mu_y,\sigma) \implies T_{\mu_y-\mu_x} = \frac{\hat{\mu}_y - \hat{\mu}_x}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim \text{N}(0,1)$$

$$X \sim \text{N}(\mu_x,\sigma),\ Y \sim \text{N}(\mu_y,\sigma) \implies T_{\mu_y-\mu_x} = \frac{\hat{\mu}_y - \hat{\mu}_x - (\mu_{y0} - \mu_{x0})}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

$$\rho = 0 \implies T_R = \sqrt{n-2}\frac{R}{\sqrt{1-R^2}} \sim t_{n-2}$$

$$\text{stickprov-i-par} \implies T_\Delta = \frac{\hat{\Delta} - \Delta_0}{s_z/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Homogenitetstest

r populationer, k klasser.

$$\begin{aligned} H_0 &: p_{ij} = p_{mj},\ \forall i, m = 1,\dots,r\ j = 1,\dots,k, \\ H_1 &: p_{ij} \neq p_{mj},\ \text{för något } i, m = 1,\dots,r\ j = 1,\dots,k. \end{aligned}$$

$$T = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}\frac{(X_{ij} - n_i\hat{p}_j)^2}{n_i\hat{p}_j} \sim_{\text{appr.}} \chi^2_{(r-1)(k-1)}$$

Oberoendetest

r variabler, k nivåer.

$$\begin{aligned} H_0 &: p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j},\ \forall i = 1,\dots,r\ j = 1,\dots,k, \\ H_1 &: p_{ij} \neq p_{i\cdot}p_{\cdot j},\ \text{för något } i = 1,\dots,r\ j = 1,\dots,k. \end{aligned}$$

$$T = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}\frac{(X_{ij} - n\hat{p}_{\cdot i}\hat{p}_{j\cdot})^2}{n\hat{p}_{\cdot i}\hat{p}_{j\cdot}} \sim_{\text{appr.}} \chi^2_{(r-1)(k-1)}$$

Test av enkel hypotes

r klasser

$$\begin{aligned} H_0 &: p_1,\dots,p_r \text{ har några specifika värden,} \\ H_1 &: \text{någon av } p_1,\dots p_r \text{ avviker från dessa värden.} \end{aligned}$$

$$T = \sum_{i=1}^{r}\frac{(X_i - np_i)^2}{np_i} \sim_{\text{appr.}} \chi^2_{r-1}$$

Tabeller

Tabell 1: Binomialfördelningen

Tabellen ger sannolikheten $P(X \leq x)$ där $X \sim Bin(n,\ p)$

n	p / x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
2	0	0.8100	0.6400	0.4900	0.3600	0.2500	0.1600	0.0900	0.0400	0.0100
	1	0.9900	0.9600	0.9100	0.8400	0.7500	0.6400	0.5100	0.3600	0.1900
3	0	0.7290	0.5120	0.3430	0.2160	0.1250	0.0640	0.0270	0.0080	0.0010
	1	0.9720	0.8960	0.7840	0.6480	0.5000	0.3520	0.2160	0.1040	0.0280
	2	0.9990	0.9920	0.9730	0.9360	0.8750	0.7840	0.6570	0.4880	0.2710
4	0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.9477	0.8192	0.6517	0.4752	0.3125	0.1792	0.0837	0.0272	0.0037
	2	0.9963	0.9728	0.9163	0.8208	0.6875	0.5248	0.3483	0.1808	0.0523
	3	0.9999	0.9984	0.9919	0.9744	0.9375	0.8704	0.7599	0.5904	0.3439
5	0	0.5905	0.3277	0.1681	0.0778	0.0313	0.0102	0.0024	0.0003	0.0000
	1	0.9185	0.7373	0.5282	0.3370	0.1875	0.0870	0.0308	0.0067	0.0005
	2	0.9914	0.9421	0.8369	0.6826	0.5000	0.3174	0.1631	0.0579	0.0086
	3	0.9995	0.9933	0.9692	0.9130	0.8125	0.6630	0.4718	0.2627	0.0815
	4	1.0000	0.9997	0.9976	0.9898	0.9688	0.9222	0.8319	0.6723	0.4095
6	0	0.5314	0.2621	0.1176	0.0467	0.0156	0.0041	0.0007	0.0001	0.0000
	1	0.8857	0.6554	0.4202	0.2333	0.1094	0.0410	0.0109	0.0016	0.0001
	2	0.9842	0.9011	0.7443	0.5443	0.3438	0.1792	0.0705	0.0170	0.0013
	3	0.9987	0.9830	0.9295	0.8208	0.6563	0.4557	0.2557	0.0989	0.0159
	4	0.9999	0.9984	0.9891	0.9590	0.8906	0.7667	0.5798	0.3446	0.1143
	5	1.0000	0.9999	0.9993	0.9959	0.9844	0.9533	0.8824	0.7379	0.4686
7	0	0.4783	0.2097	0.0824	0.0280	0.0078	0.0016	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.8503	0.5767	0.3294	0.1586	0.0625	0.0188	0.0038	0.0004	0.0000
	2	0.9743	0.8520	0.6471	0.4199	0.2266	0.0963	0.0288	0.0047	0.0002
	3	0.9973	0.9667	0.8740	0.7102	0.5000	0.2898	0.1260	0.0333	0.0027
	4	0.9998	0.9953	0.9712	0.9037	0.7734	0.5801	0.3529	0.1480	0.0257
	5	1.0000	0.9996	0.9962	0.9812	0.9375	0.8414	0.6706	0.4233	0.1497
	6	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9922	0.9720	0.9176	0.7903	0.5217

Fortsättning nästa sida

Tabell 2: Poissonfördelningen

Tabellen ger sannolikheten $P(X \leq x)$ där $X \sim Po(\lambda)$

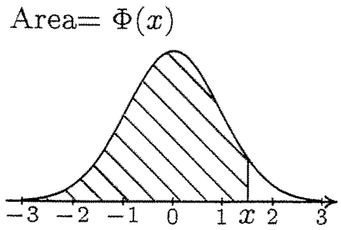
x	$\lambda = 0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999

x	$\lambda = 1.1$	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1	0.6990	0.6626	0.6268	0.5918	0.5578	0.5249	0.4932	0.4628	0.4337	0.4060
2	0.9004	0.8795	0.8571	0.8335	0.8088	0.7834	0.7572	0.7306	0.7037	0.6767
3	0.9743	0.9662	0.9569	0.9463	0.9344	0.9212	0.9068	0.8913	0.8747	0.8571
4	0.9946	0.9923	0.9893	0.9857	0.9814	0.9763	0.9704	0.9636	0.9559	0.9473
5	0.9990	0.9985	0.9978	0.9968	0.9955	0.9940	0.9920	0.9896	0.9868	0.9834
6	0.9999	0.9997	0.9996	0.9994	0.9991	0.9987	0.9981	0.9974	0.9966	0.9955
7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998

x	$\lambda = 2.1$	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.3796	0.3546	0.3309	0.3084	0.2873	0.2674	0.2487	0.2311	0.2146	0.1991
2	0.6496	0.6227	0.5960	0.5697	0.5438	0.5184	0.4936	0.4695	0.4460	0.4232
3	0.8386	0.8194	0.7993	0.7787	0.7576	0.7360	0.7141	0.6919	0.6696	0.6472
4	0.9379	0.9275	0.9162	0.9041	0.8912	0.8774	0.8629	0.8477	0.8318	0.8153
5	0.9796	0.9751	0.9700	0.9643	0.9580	0.9510	0.9433	0.9349	0.9258	0.9161
6	0.9941	0.9925	0.9906	0.9884	0.9858	0.9828	0.9794	0.9756	0.9713	0.9665
7	0.9985	0.9980	0.9974	0.9967	0.9958	0.9947	0.9934	0.9919	0.9901	0.9881
8	0.9997	0.9995	0.9994	0.9991	0.9989	0.9985	0.9981	0.9976	0.9969	0.9962
9	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9991	0.9989
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999

Fortsättning nästa sida

Tabell 3: Normalfördelningen

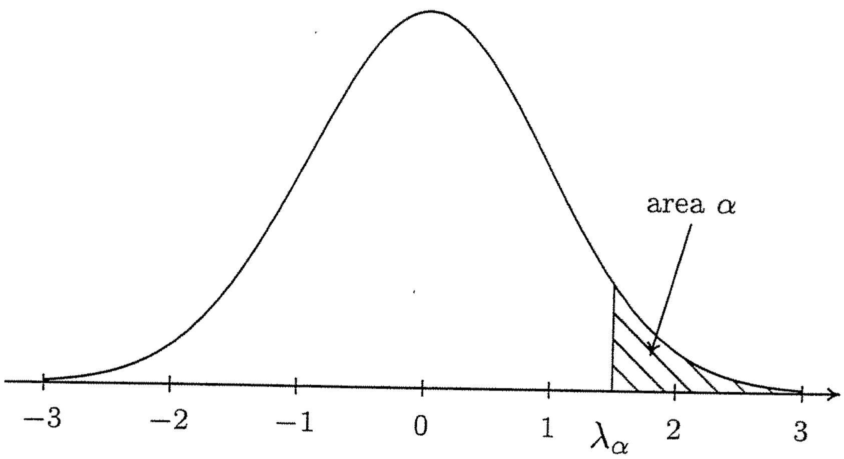


$P(X \leq x) = \Phi(x)$, där $X \sim N(0,1)$

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

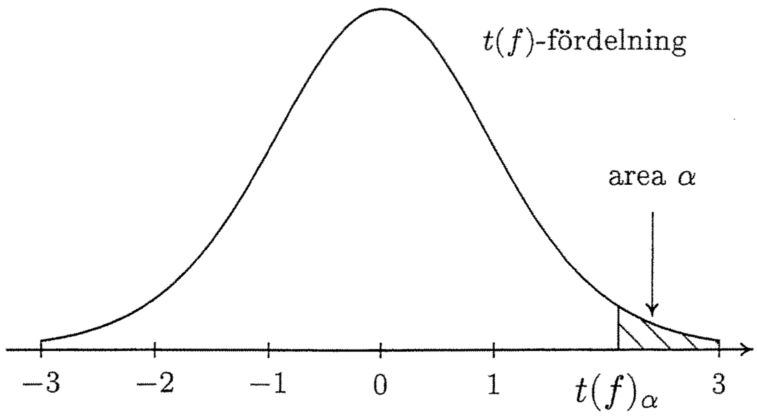
x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

Tabell 4: Normalfördelningskvantiler



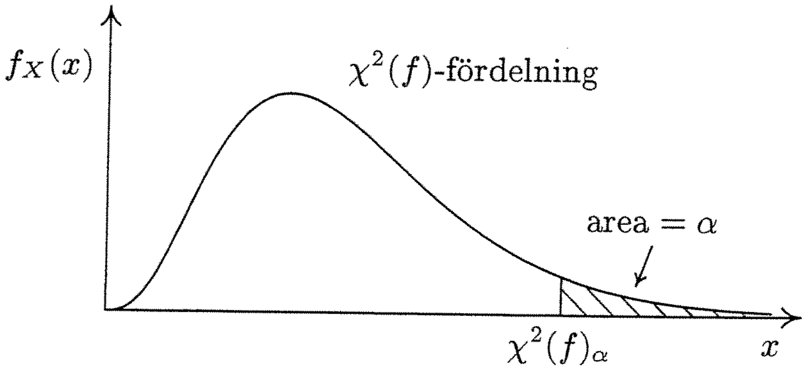
α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
λ_α	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902	3.2905

Tabell 5: t-fördelningskvantiler



f \ α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	318.289	636.578
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.328	31.600
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.894	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.689
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.660
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
70	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211	3.435
80	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
90	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183	3.402
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390

Tabell 6: χ^2-fördelningskvantiler



f \ α	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.83	12.12
2	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	13.82	15.20
3	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	16.27	17.73
4	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	18.47	20.00
5	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	20.52	22.11
6	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46	24.10
7	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32	26.02
8	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12	27.87
9	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88	29.67
10	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59	31.42
11	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76	31.26	33.14
12	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91	34.82
13	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53	36.48
14	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12	38.11
15	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70	39.72
16	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25	41.31
17	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79	42.88
18	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31	44.43
19	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82	45.97
20	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31	47.50
21	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80	49.01
22	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27	50.51
23	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73	52.00
24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18	53.48
25	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62	54.95
26	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05	56.41
27	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64	55.48	57.86
28	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89	59.30
29	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30	60.73
30	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70	62.16
40	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40	76.09
50	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66	89.56
60	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61	102.70
70	85.53	90.53	95.02	100.43	104.21	112.32	115.58
80	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32	124.84	128.26
90	107.57	113.15	118.14	124.12	128.30	137.21	140.78
100	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17	149.45	153.16

LÖSNINGAR STATISTIK FÖR LÄRARE
2009-01-12 LMA210

1. $X \sim Poi(4.4)$

a) $P(X \leq 3) \underset{\uparrow \text{ tabell}}{=} \underline{0{,}3594}$

b) $P(X = 5 \mid X = 3 \text{ eller } 5) =$

$$= \frac{P(X=5)}{P(X=3) + P(X=5)} = \frac{\frac{e^{-4.4}\, 4.4^5}{5!}}{\frac{e^{-4.4}\, 4.4^3}{3!} + \frac{e^{-4.4}\, 4.4^5}{5!}} \approx \underline{0{,}49}$$

2.) a) $P(A \cap B) \overset{\text{ober}}{=} P(A)P(B) = 0{,}25 \cdot 0{,}55 = \underline{0{,}1375}$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \overset{\text{ober}}{=}$

$P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0{,}25 + 0{,}55 - 0{,}25 \cdot 0{,}55 = \underline{0{,}6625}$

c) $P(A \cap B) \overset{\text{disjunkta}}{=} P(\emptyset) = \underline{0}$

d) $P(A \cup B) \underset{\text{disjunkta}}{=} P(A) + P(B) = 0{,}25 + 0{,}55 = \underline{0{,}8}$

3. Se kurslitteraturen (Teorifråga)

4. a) $\int_3^5 c x^{-2} dx = \left[-c x^{-1}\right]_3^5 = -\frac{c}{5} + \frac{c}{3} = \frac{-3c}{15} + \frac{5c}{15} =$

$= \frac{2c}{15} = 1 \iff c = \frac{15}{2} = \underline{7.5}$

$E[X] = \int_3^5 x \, 7{,}5 x^{-2} dx = 7{,}5 \int_3^5 x^{-1} dx =$

$= 7{,}5 \left[\ln x\right]_3^5 = 7{,}5 (\ln 5 - \ln 3) \approx 3{,}83$

$E[X^2] = \int_3^5 x^2 \, 7{,}5 x^{-2} dx = 7{,}5 \int_3^5 dx = 7{,}5(5-3) = 15$

$\Rightarrow \underline{V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 15 - 3{,}83^2 \approx 0{,}33}$

b) OBS: $X^{-2} \in [\frac{1}{25}, \frac{1}{9}]$. Antag $x \in [\frac{1}{25}, \frac{1}{9}]$. Då fås

$F_{X^{-2}}(x) = P(X^{-2} \leq x) = P(X^{-1} \leq \sqrt{x}) = P(X \geq \frac{1}{\sqrt{x}}) =$

$= 1 - P(X < \frac{1}{\sqrt{x}}) = 1 - \int_3^{\frac{1}{\sqrt{x}}} 7{,}5 y^{-2} dy =$

$= 1 - \left[-7{,}5 y^{-1}\right]_3^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1 - \left(-7{,}5\sqrt{x} - \left(-\frac{7{,}5}{3}\right)\right) =$

$= 1 + 7{,}5\sqrt{x} - \frac{7{,}5}{3} = 7{,}5\sqrt{x} - 1{,}5$ för $x \in [\frac{1}{25}, \frac{1}{9}]$

$f_{X^{-2}}(x) = \frac{d}{dx}\left(F_{X^{-2}}(x)\right) = \boxed{\frac{7{,}5}{2} \cdot x^{-1/2}}$, $x \in [\frac{1}{25}, \frac{1}{9}]$

= 2 [illegible]

5.

$Y \sim \text{Bin}(n=1200,\ p=0{,}72)$.

$np(1-p) = 1200 \cdot 0{,}72 \cdot 0{,}28 \approx 242 > 10$ så

OK att approx med $N(np, \sqrt{np(1-p)}) =$

$= N(864,\ 15{,}55)$

$$P(Y \leq 825) \approx P\left(N(0,1) \leq \frac{825-864}{15{,}55}\right) \approx$$

$$\Phi(-2{,}51) = 1 - \Phi(2{,}51) \approx 1 - 0{,}994 \approx \underline{0{,}006}$$

tabell

Satsen heter Centrala Gränsvärdessatsen.

6.

$$S_p^2 = \frac{50 \cdot 24{,}9 + 50 \cdot 22{,}7}{51 + 51 - 2} \approx 23{,}8$$

$t_{100}(0{,}1) = 1{,}29$

90% KI: $40 - 29 \pm 1{,}29 \cdot \sqrt{23{,}8} \cdot \sqrt{\frac{1}{50} + \frac{1}{50}}$

$= 11 \pm 1{,}259 = \underline{[9{,}74,\ 12{,}26]}$

Eftersom 0 inte ligger i intervallet förkastar vi hypotesen att väntevärdena skulle vara lika på nivå $\alpha = 0.1$.

7.) Låt A_i = {drar i gröna kulor från urna 1}
B_i = {drar i gröna kulor från urna 2}

C = {drar lika många gröna kulor från bågge urnorna}.

$$C = (A_0 \cap B_0) \cup (A_1 \cap B_1) \cap (A_2 \cap B_2)$$

$$P(C) \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=0}^{2} P(A_i \cap B_i) \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=0}^{2} P(A_i) \cdot P(B_i)$$

disjunkta ... oberoende

$$P(A_0) = \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{30}{72} \quad P(A_1) = \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{36}{72}$$

$$P(A_2) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{6}{72}$$

$$P(B_0) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{12}{72} \quad P(B_1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{40}{72}$$

$$P(B_2) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{20}{72}$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{30 \cdot 12}{72^2} + \frac{36 \cdot 40}{72^2} + \frac{6 \cdot 20}{72^2} = \frac{10}{27} \approx 0.37$$

8.) a)

$$P_X(1) = P_{XY}(1,1) + P_{XY}(1,2) = 0.2 + 0.15 = 0.35$$

$$P_X(2) = P_{XY}(2,1) + P_{XY}(2,2) = 0.3 + 0.35 = 0.65$$

$$P_Y(1) = 0.2 + 0.3 = 0.5 \quad P_Y(2) = 0.15 + 0.35 = 0.5$$

$$E[X] = 1 \cdot 0.35 + 2 \cdot 0.65 = 1.65$$

$$E[Y] = 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.5 = 1.5$$

$$E[5X - 8Y] = 5E[X] - 8E[Y] = 5 \cdot 1.65 - 8 \cdot 1.5 = -3.75$$

b) $X^Y = 1$ om $(X, Y) = (1,1)$ eller $(1,2)$

$= 2$ om $(X, Y) = (2,1)$

$= 4$ om $(X, Y) = (2,2)$.

$P(X^Y = 1) = p_{XY}(1,1) + p_{XY}(1,2) = 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}35$

$P(X^Y = 2) = 0{,}3$

$P(X^Y = 4) = 0{,}35$

$\Rightarrow E[X^Y] = 1 \cdot 0{,}35 + 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}35 = \underline{2{,}35}$

9.) $P(\text{kast bra}) = \int_0^{\frac{1}{2\lambda}} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{\frac{1}{2\lambda}} =$

$= -e^{-1/2} + 1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0{,}39$

X = antalet kast som behövs

$X \sim ffg(0{,}39) \qquad p_X(k) = 0{,}39 \cdot 0{,}61^{k-1}$

$k = 1, 2, \ldots$

$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) =$

$1 - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) - P(X=4)$

$= 1 - 0{,}39 - 0{,}39 \cdot 0{,}61 - 0{,}39 \cdot 0{,}61^2 - 0{,}39 \cdot 0{,}61^3$

$\approx \underline{0{,}138}$