

Föreläsning 2

1

Oberoende

Ex. Vi kastar två tärningar. Vi säger att de är oberoende, för slh att den ena får ett, två, osv påverkas inte av utfallet på den andra.

Tärning 1 kan ge 1, 2, 3, 4, 5, 6 med $p = \frac{1}{6}$ för varje, samma för tärning 2.

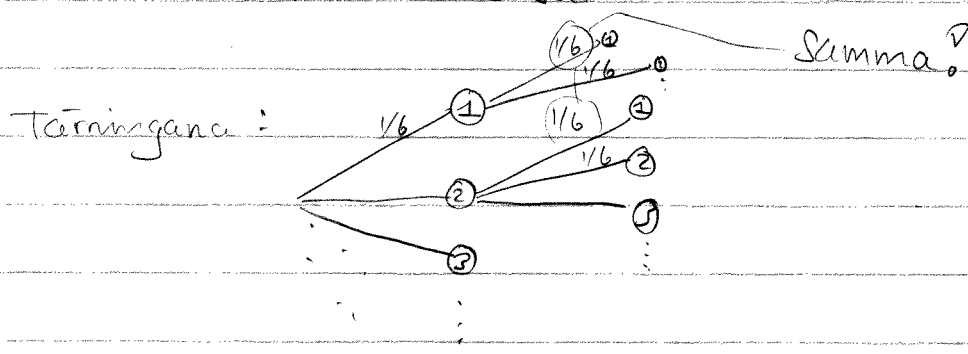
$$\text{Så } P(\text{första ger } i; \text{ andra } j) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

↑ varför fick vi multiplicera?

> oberoende ▽

Def. A och B är oberoende om $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Intuitivt: slh för B är samma vare sig A eller A^c inträffar, och vice versa.



Obs

Oberoende är inte detsamma som disjunkt.

disjunkt: $A \cap B = \emptyset$

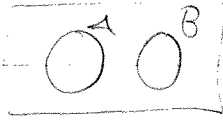
oberoende: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

men A, B disjunkt $\Rightarrow \emptyset = P(\emptyset) = P(A \cap B) = P(A)P(B) > 0$
 $P(A), P(B) > 0$

Motsägelse

②

tecknartom:



A, B delij: Om A inträffar så kan inte B inträffa
→ beroende.

Ex. Anta $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.12$, $P(A \cup B) = 0.13$

Är A och B oberoende?

$$\text{Vet att } P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) =$$

$$= 0.25 + 0.12 - 0.3 = \underline{0.07}$$

$$\text{men } P(A)P(B) = 0.25 \cdot 0.12 = \underline{0.04}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A)P(B) \Rightarrow \text{ej oberoende}$$

Visa slides om rättegången!

Betingade sannolikheter

Ex. Kasta två tärningar

(I) Vad är slh för summan 6?

Totalt 36 utfall varav 5 (1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1) ger summan 6.

$$\text{så } p = \boxed{\frac{5}{36}}$$

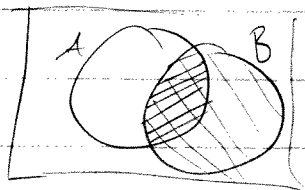
(II) givet att första tärningen ger en 3:a, vad är slh för summan 6?
måste få 3:a $\rightarrow p = \boxed{\frac{1}{6}}$

Def. A, B händelser, $P(B) > 0$. Betingade slh för A givet B är

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Intuitivt: (givet att B inträffar så "händer allt i B "; B är "det nya utfallsrummet"; $P(B|B) = 1$.)

Hur stor andel av B utgörs av $A \cap B$? $P(A|B)$.



Obs

A & B oberoende

$$\Rightarrow P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A)}{P(A)} = P(B)$$

(betingningarna påverkar inte)

$$\left. \begin{array}{l} P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \\ P(A \cap B) = P(B \cap A) \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)}$$

Formalisera exemplet:

$A = \{\text{summan blir } 6\}$

$B = \{\text{första tärningen blir } 3\}$

$P(A) = 5/36$ (klassiska sannolikhetsdef).

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{(3,3)\})}{P(\{(3,1), \dots, (3,6)\})} = \frac{1}{6}$$

Lagen om total sannolikhet

Ex. Sven spelar på casino ~~men har druckit för mycket~~, så han väljer slumpmässigt mellan roulette och blackjack. Uppskattan att han vinner i roulette med slh 0.03 och i blackjack med slh 0.01. Vad är slh att han vinner något alls?

Låt $A = \{\text{Sven vinner}\}$

$B_1 = \{\text{Sven spelar roulette}\}$

$B_2 = \{\text{Sven spelar blackjack}\}$

Sven måste välja ett spel ($B_1 \cup B_2 = \Omega$)
men bara ett ($B_1 \cap B_2 = \emptyset$)

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)$$

B_1 & B_2 disjunkt $\Rightarrow (A \cap B_1)$ & $(A \cap B_2)$ disjunkt

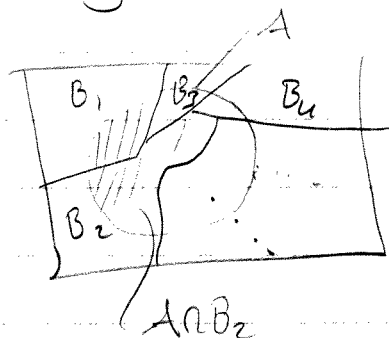
$$\Rightarrow P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2)$$

enl. def av betingad slh: $P(A \cap B_i) = P(A|B_i) \cdot P(B_i)$

$$\text{så } P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) =$$

$$= 0.03 \cdot \frac{1}{2} + 0.01 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{0.02}}$$

Sats. Lagen om total sannolikhet.



A händelse; $B_1, \dots, B_n$ disjunkt händelser
vars union utgör hela utfallsrummet;

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad i \neq j$$

$$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega \quad (B_1, \dots, B_n \text{ en partition})$$

Då

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)$$

~~motivering: $P(A|B_1)P(B_1) = P(A \cap B_1)$ (eftersom~~

def av betingad sannolikhet

$$\Rightarrow P(A|B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(B_i)}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B_i) = P(A|B_i)P(B_i)$$

Så, vi delar upp A i n ~~delar~~ disjunkt delar och summerar.

Sats: Bayes sats

Under samma villkor gäller

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1) + \dots + P(B_n)P(A|B_n)}$$

ger "vända på betingningen"
oss möjlighet att

Ex. Sven spelar (igen). Anta att Sven vinner (på något av spelen). Vad är då slh att han spelat roulette?

Söker $P(B_1|A)$

$$\begin{aligned} \text{Bayes sats} \Rightarrow P(B_1|A) &= \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)} \\ &= \frac{0.03 \cdot 0.5}{0.02} = \underline{0.75} \end{aligned}$$

($\Rightarrow$ det är tre ggr troligare att vinsten kommer från roulette än från blackjack)

$$\text{Bevis: } P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

Lagen om total slh $\rightarrow P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + \dots + P(B_n)P(A|B_n)$