

Föreläsning 6

1

Kontinuerliga s.v., Forts

Exponentialfördelningen

Används för att beskriva livslängden för en maskin, tiden man står i kö, etc, tiden det tar tills något som har samma slk hela tiden inträffar

Om $X \sim \text{Exp}(\beta)$ så

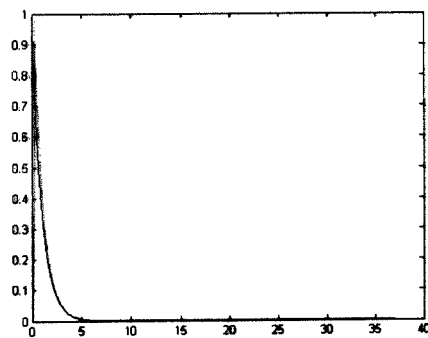
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$E[X] = \beta; \quad V(X) = \beta^2$$

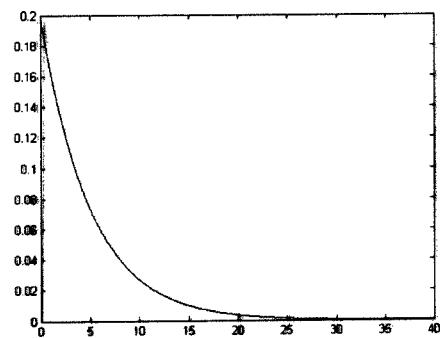
(Kallas så för att fätheten är en exponential)

Exponentialfördelningar

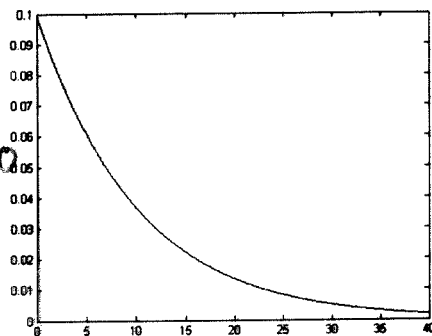
$\beta = 1$



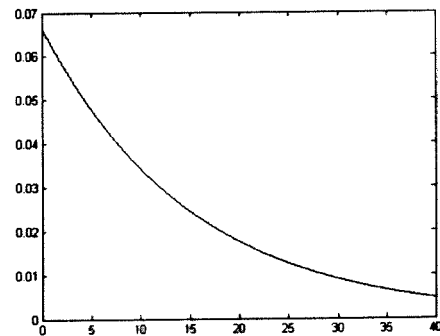
$\beta = 5$



$\beta = 10$



$\beta = 15$



Ex. Tiden man får stå i kö på McDonalds antas vara exp-fördelad med väntevärde 10 min. Hur stor är sannolikheten att man får vänta mer än 20 min?

$$X \sim \text{Exp}(10)$$

$$P(X \geq 20) = \int_{20}^{\infty} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} dx = \int_{20}^{\infty} \frac{1}{10} e^{-x/10} dx =$$

$$= \left[-e^{-x/10} \right]_{20}^{\infty} = 0 + \frac{1}{e^2} \approx \underline{0.1353}$$

Normalfördelningen

Normalfördelningen är den mest använda fördelningen. En s.v. X är normalfördelad med väntevärde μ & varians σ^2 , $X \sim N(\mu, \sigma)$ om

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \begin{array}{l} -\infty < x < \infty \\ \sigma > 0 \end{array}$$

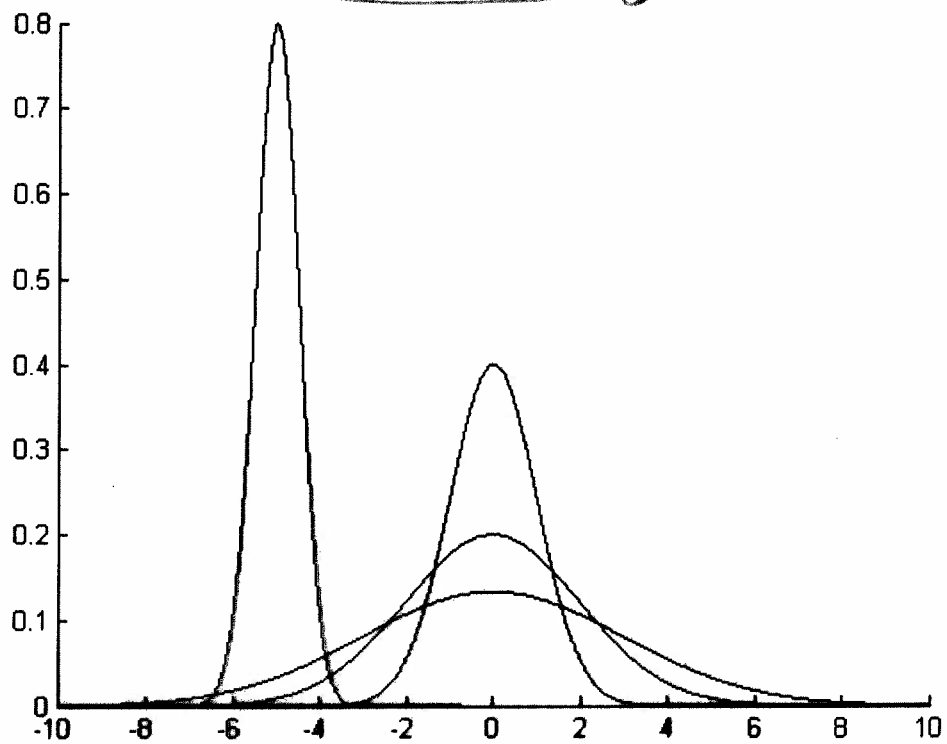
$$E[X] = \mu, \quad V(X) = \sigma^2$$

För $N(0,1)$ -fördelningen har täthet & fördelningsfunktion egna beteckningar:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt$$

Normalfördelningar



$N(0,1)$ -fördelningsfunktionen, $\Phi(x)$, finns tabellerad sid 391
 När man löser problem kan vilken normalfördelning som helst skalas om till $N(0,1)$ och tabellen användas:

Omskaling av $N(\mu, \sigma^2)$ till $N(0,1)$

Om $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

Kan visa att Z är normalfördelad, görs ej här (kräver gen. fun.)

$E[Z] = E\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma}(E[X] - \mu) = \frac{1}{\sigma}(\mu - \mu) = 0$

$V(Z) = V\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(X) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2 = 1$

Därför kan $F_Z(x)$, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, uttryckas i Φ :

$$F_Z(x) = P(X \leq x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = P\left(\underset{\substack{\uparrow \\ \sim N(0,1)}}{Z} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tabellerad}}}{\frac{x - \mu}{\sigma}}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Mer generellt: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Y = aX + b \sim ?$

$E[Y] = E[aX + b] = aE[X] + b = a\mu + b$

$V(Y) = V(aX + b) = a^2V(X) = a^2\sigma^2$

$\Rightarrow Y \sim N(a\mu + b, |a|\sigma)$

Ännu mer generellt: Linjärkombinationer av oberoende normalfördelade variabler

Låt $Z_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1), \dots, Z_n \sim N(\mu_n, \sigma_n)$ vara oberoende $a_1, \dots, a_n$ och b konstanter.

$$\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^n a_i Z_i + b \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2),$$

$$\text{där } \mu_Y = E[Y] = E\left[\sum_{i=1}^n a_i Z_i + b\right] = \sum_{i=1}^n a_i E[Z_i] + b = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i + b$$

$$\sigma_Y^2 = V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^n a_i Z_i + b\right) = V\left(\sum_{i=1}^n a_i Z_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(Z_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2$$

↑
oberoende

$$\text{Så } Y \sim N\left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i + b, \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2}\right)$$

Obs: Viktig egenskap

Om $Z \sim N(\mu, \sigma)$ så gäller för alla μ och σ att

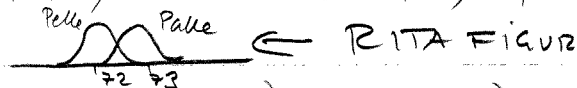
$$P(\mu - \sigma \leq Z \leq \mu + \sigma) \approx 0.68$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq Z \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.95$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq Z \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.997$$

Ex. Pelle & Palle går upp och ner i vikt i perioder. Pelle's vikt är $N(72, 1)$ -fördelad och Palle's vikt är $N(73, 1)$ -fördelad. Hur stor är slk att Pelle väger mer än Palle (vid en slumpmässig tidpunkt)?

$$X \sim N(72, 1), Y \sim N(73, 1), P(X > Y)?$$



$$P(X > Y) = P(X - Y > 0) = P(Z > 0)$$

$$\text{där } Z = X - Y \sim N(72 - 73, \sqrt{1^2 + 1^2}) = N(-1, \sqrt{2})$$

$$\text{d} \mu_Z = -1, \sigma_Z = \sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow P(Z > 0) = P\left(\frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z} > \frac{0 - \mu_Z}{\sigma_Z}\right) = P\left(W > \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$\uparrow$
 $N(0, 1)$

$$= 1 - P(W \leq \frac{1}{\sqrt{2}}) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(0.707) = \underline{0.2206}$$

$\uparrow$ tabell sid 391.