Föreläsning 9: Sammanfattning

Gör ett slumpmässigt försök, får ett utfall ur ett utfallsrum. Mängder av utfall bildar händelser.

Sannolikhet: klassiskt

$$P(A) = \frac{\text{antal utfall i } A}{\text{totalt antal utfall}}$$

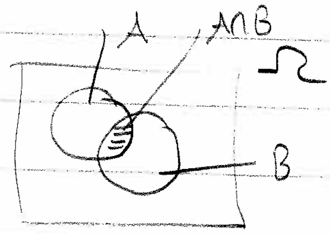
Kolmogorov:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$A \cap B = \emptyset \text{ (disjunkta)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Venndiagram:



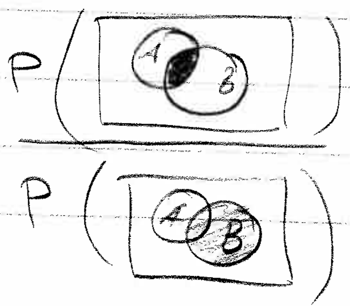
Räkneregler: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Oberoende: A och B är oberoende om $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

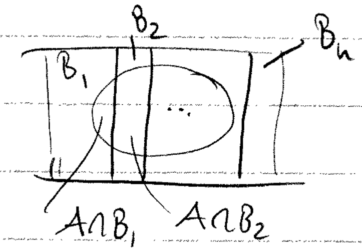
Disjunkta händelser är inte detsamma som oberoende

Betingning: $P(A \text{ givet } B) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} =$

= 

Lagen om total sannolikhet

$B_1, \ldots, B_n$ disjunkta; $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$



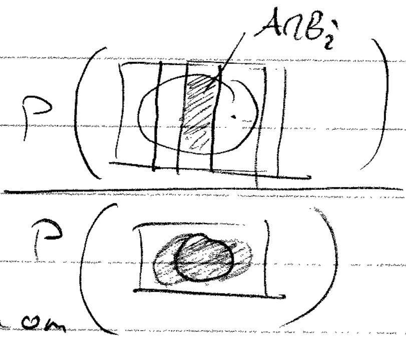
$$\Rightarrow P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n)$$

Skriver enl. def av betingning om som

$$\boxed{P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \ldots + P(A|B_n)P(B_n)}$$

Bayes sats

$$P(B_i|A) = \frac{P(A \cap B_i)}{\underbrace{P(A \cap B_1) + \ldots + P(A \cap B_n)}_{= P(A) \text{ enl. lagen om tot. slh.}}} =$$



$$= \boxed{\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1) + \ldots + P(B_n)P(A|B_n)}}$$

En variabel som betecknar ett slumpmässigt värde kallas <u>stokastisk variabel</u>. (X) Ett konkret värde kallas en <u>observation</u>. (x).

Diskreta stokastiska variabler

Sannolikhetsfunktion $p_X(k) = P(X=k)$

Fördelningsfunktion $F_X(x) = \sum_{j \leq x} p_X(j)$ (def. för alla x)

- Väntevärde: $\mu_X = E[X] = \sum_k k\, p_X(k)$, medelvärdet av oändligt många observationer

- $$E[aX] = aE[X]$$
  $$E[X+a] = E[X]+a$$
  $$E[X+Y] = E[X]+E[Y].$$

Varians $V(X)$ och standardavvikelse $D(X)$: de vanligaste spridningsmåtten

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_k (k-\mu)^2 p_X(k)$$

- alt. $V(X) = E[X^2] - E[X]^2$

- $D(X) = \sqrt{V(X)}$

$$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

$$V(X+Y) = V(X)+V(Y) \text{ om } X \,\&\, Y \text{ oberoende.}$$

~~Annars~~ Allmänt: $V(X, Y) = V(X)+V(Y)+2C(X,Y)$

<u>Bernoullifördelning</u>: $X \sim Ber(p)$ om $P(X=1)=p$ & $P(X=0)=1-p$.
Modell för ett slumpmässigt försök som lyckas med slh p.

<u>Binomialfördelning</u>: Oberoende, lika försök, <u>förutbestämt antal</u> n försök, slh p att lyckas:

$$X \sim Bin(n,p)$$

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k=0,1,\ldots,n$$

<u>För första gången (geometrisk) fördelning</u>: Genomför likadana och oberoende försök tills man lyckas första gången. (Inte förutbestämt antal)

$$X \sim Geo(p) \text{ eller } X \sim ffg(p)$$

där p är slh att ett försök lyckas.

$$p_X(k) = (1-p)^{k-1} p \quad k=1,2,\ldots,\infty$$

<u>Poissonfördelningen</u>: Något händer med lika stor sannolikhet hela tiden och vi har ett <u>förväntat antal händelser per tidsenhet</u> (intensitet) λ, så

$$X \sim Po(\lambda)$$

$$p_X(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad k=0,1,2,\ldots$$

Kontinuerliga stokastiska variabler

Sannolikhetsdensitet $f_X(x) = F_X'(x)$

Fördelningsfunktion $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

Väntevärde $\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$

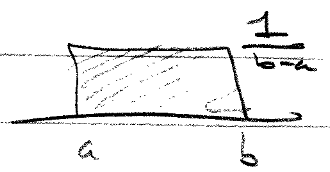
Varians $\sigma_X^2 = V(X) = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)dx$

Som i diskreta fallet: $V(X) = E[X^2] - E[X]^2$

Likformig fördelning:

$X \sim U([a,b])$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



Exponentialfördelning: Beskriva väntetiden till en händelse som inträffar med samma sannolikhet hela tiden, förväntade tiden är β: $X \sim Exp(\beta)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Normalfördelning

$X \sim N(\mu, \sigma)$, (normalfördelad med v.v. μ & std σ)

Om

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

$N(0,1)$-fördelningen har egna beteckningar:

sannolikhetstäthet: $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

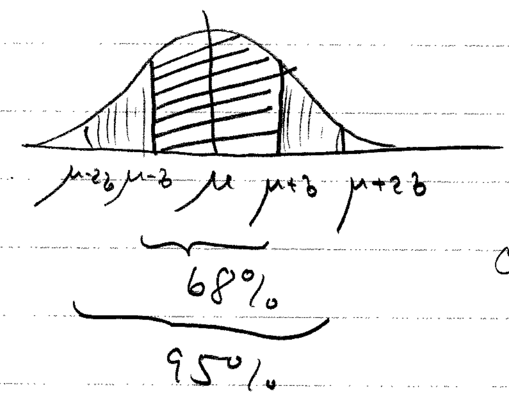
fördelningsfunktion: $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)\,dt$

Om $X \sim N(\mu, \sigma)$ så $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

ty $E[Z] = E\left[\frac{X-\mu}{\sigma}\right] = \frac{E[X]-\mu}{\sigma} = 0$

$V(Z) = V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} V(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$

Obs:



oberoende av μ & σ.

Centrala gränsvärdessatsen

Summor och medelvärden av många likafördelade stokastiska variabler är ungefär normalfördelad.

$\Rightarrow$ vi kan till exempel approximera Binomial med Normal.

Om $X \sim Bin(n,p)$ och $np(1-p) \geq 10$

så $X \overset{approx.}{\sim} N(\underbrace{np}_{E[X]}, \underbrace{\sqrt{np(1-p)}}_{D(X)\ (=\sqrt{V(X)})})$

Flerdimensionella fördelningar (2-dim)

2-dim simultan fördelningsfunktion:

$$p_{XY}(j,k) = P(\{X=j\} \cap \{Y=k\}) = P(X=j \text{ och } Y=k)$$

$$\sum_{j,k} p_{XY}(j,k) = 1$$

Kan få fram sannolikhetsfunktionen för X & Y separat:
(marginella sannolikhetsfunktionerna)

$$p_X(j) = P(X=j) = P(X=j \ \& \ Y = \text{vad som helst}) =$$

$$= \sum_k P(\{X=j\} \cap \{Y=k\}) = \sum_k p_{XY}(j,k)$$

p.s.s. $p_Y(k) = \sum_j p_{XY}(j,k)$

2-dim simultan fördelningsfunktion:

$$F_{XY}(x,y) = P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = \sum_{j \leq x} \sum_{k \leq y} p_{XY}(j,k)$$

<u>Oberoende stokastiska variabler</u>

om $\{X \leq x\}$ och $\{Y \leq y\}$ är oberoende händelser så

$$\underbrace{P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\})}_{= F_{XY}(x,y)} = \underbrace{P(X \leq x)}_{= F_X(x)} \underbrace{P(Y \leq y)}_{= F_Y(y)}$$

så X & Y oberoende om för alla x,y

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$$

och även om $p_{XY}(j,k) = p_X(j) p_Y(k)$

<u>Kovarians</u>

mått på (linjärt) beroende mellan två s.v.

$$C(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = E[XY] - \mu_X \mu_Y$$

Om $C(X,Y)=0$ så är X & Y <u>okorrelerade</u> (måste inte vara oberoende)

Om X & Y oberoende så $E[XY] = E[X]E[Y]$ så då är $C(X,Y)=0$.

Korrelationskoefficient: $\rho(X,Y) = \dfrac{C(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

$$-1 \leq \rho \leq 1$$