Föreläsning 11

Konfidensintervall

Punktskattningar är s.v., alltså "osäkra". Hur osäkra?

$\rightarrow$ $\boxed{\text{konfidensintervall}}$

Ex Anta att vi tar n observationer $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma)$, där μ är okänd, σ känd.

Då $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$

Vet att med 95% slh ligger en normalförd. s.v. inom 1.96 std-avvikelser från sitt väntevärde.

$$\Rightarrow P\left(\mu - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X} \le \mu + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx 0.95$$

Skriv om s.a. μ hamnar "i mitten".

$$0.95 \approx P\left(\mu - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X} \le \mu + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= P\left(\left\{\bar{X} \ge \mu - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} \cap \left\{\bar{X} \le \mu + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}\right) =$$

$$= P\left(\left\{\mu \le \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} \cap \left\{\mu \ge \bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}\right)$$

$$= P\left(\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$\Rightarrow$ med 95% slh/säkerhet ligger verkliga värdet μ i intervallet

$$I_\mu = \left[\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

95%-igt konfidensintervall för μ (med konfidensgrad 0.95).

Konfidensintervall för väntevärde, σ känd

Har stickprov med oberoende observationer $X_1, \dots, X_n$ från förd. med väntevärde μ & varians σ^2 (känd)

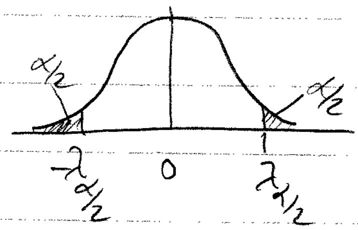
Punktskattning $\hat{\mu} = \bar{X}$. Konfidensintervall?

$\bar{X} \overset{\text{appr.}}{\sim} N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$ (centrala gränsvärdessatsen)

$$\Rightarrow \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow P\left(-\lambda_{\alpha/2} \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \lambda_{\alpha/2}\right) \approx \alpha$$

där $\lambda_{\alpha/2}$ är s.a. $P(W \ge \lambda_{\alpha/2}) = \alpha/2$
$W \sim N(0,1)$ ($\lambda_{\alpha/2}$ är $\alpha/2$-kvantilen)



$$\Rightarrow P\left(\bar{X} - \lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + \lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx \alpha$$

Så $100(1-\alpha)\%$ konfidensintervall ges av

$$\boxed{I_\mu = \left[\bar{X} - \lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]}$$

<u>Obs</u>: $\lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ är här den s.k. <u>felmarginalen</u>

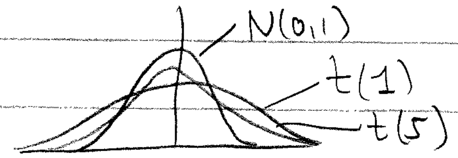
Konfidensintervall för väntevärde, σ okänd

Om σ okänd måste vi skatta med

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

då $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \not\sim N(0,1)$ utan $\overset{\text{appr.}}{\sim} t(n-1)$

en t-fördelning med $n-1$ frihetsgrader, mer 'utsmetad' än $N(0,1)$.



Varför mer utsmetad?
$n \to \infty$?

Då $P\left(-t(n-1)_{\alpha/2} \le \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le t(n-1)_{\alpha/2}\right) \approx \alpha$

där $P(W \ge t(n-1)_{\alpha/2}) = \alpha/2$ om $W \sim t(n-1)$

Så nu $100(1-\alpha)\%$ konf. int:

$$\boxed{I_\mu = \left[\bar{X} - t(n-1)_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t(n-1)_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]}$$

Tolkning av konf. int: "Om vi har 95% konfidensintervall för 20 olika stickprov, så kommer μ att ligga inuti i medeltal 19 av dem"

$\boxed{\text{Obs:}}$ Om $X_1, \ldots, X_n$ är normalfördelade är konfidensintervallen exakta, annars approx (centr. gränsv. sats)

Ex. Värdena 0.51, 0.61, 0.51, 0.49, 0.42 är från en $N(\mu,\sigma)$.
Hitta 95% konf. Int för μ.

$\bar{x} = 0.5062$ $\quad s^2 = \frac{1}{4}\left[(0.51-\bar{x})^2 + \ldots\right] = 0.0046 \Rightarrow s = 0.0678$

Så $I_\mu = \left[\bar{x} - t(n-1)_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t(n-1)_{\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

Vad är $t(n-1)_{\alpha/2}$? $\alpha = 0.05$ så $\alpha/2 = 0.025$ & $n=5$

Tabell sid 393 $\Rightarrow$ $t(4)_{0.025} = 2.776$

$\Rightarrow I_\mu = \left[0.5062 - 2.776 \cdot \frac{0.0678}{\sqrt{5}}, 0.5062 + 2.776 \cdot \frac{0.0678}{\sqrt{5}}\right]$

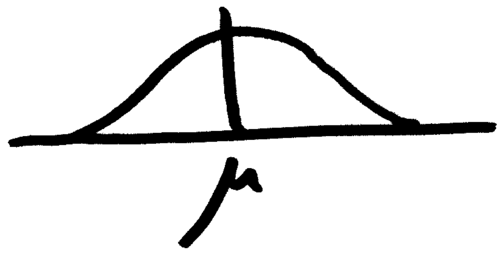
$= [0.422, 0.590]$

Data var från en $N(0.5, 0.1)$-förd så $\mu \in I_\mu$, vilket i snitt skulle hänt 19 ggr av 20 om vi haft många såna stickprov.

Konfidensgrad & intervall-längd

Har 100 mätvärden från någon fördelning
Vill ha konfidensintervall för μ.

Vilken konfidensgrad? $\longleftrightarrow$ Vilken längd?



$\vdash\!\dashv$ 90% konfint

kortare intervall? minska konfidensgraden:

$\vdash\!\dashv$ 50% konfint.

MEN: lika sannolikt att $\mu \notin I_\mu$ som att $\mu \in I_\mu$

längre intervall för högre säkerhet:

$-\infty$ ... ——————————— ... ∞ 100% konfint

Slutsats: Gör saker lagom (lagom betyder ofta 90%, 95% eller 99%)

Konfidensintervall för väntevärdesskillnad

Antag att vi har två stickprov:

$$X_1, \ldots, X_{n_X} \sim N(\mu_X, \sigma)$$
$$Y_1, \ldots, Y_{n_Y} \sim N(\mu_Y, \sigma) \quad (\text{samma } \sigma)$$

Skattar väntevärdena som

$$\hat{\mu}_X = \bar{X} \sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma}{\sqrt{n_X}}\right)$$
$$\hat{\mu}_Y = \bar{Y} \sim N\left(\mu_Y, \frac{\sigma}{\sqrt{n_Y}}\right)$$

Är det skillnad i väntevärde, åt vilket håll?

Betrakta $\hat{\mu}_X - \hat{\mu}_Y = \bar{X} - \bar{Y}$.

$$E[\bar{X} - \bar{Y}] = E[\bar{X}] - E[\bar{Y}] = \mu_X - \mu_Y$$
$$V(\bar{X} - \bar{Y}) = V(\bar{X}) + V(\bar{Y}) = \frac{\sigma^2}{n_X} + \frac{\sigma^2}{n_Y}$$

$$\Rightarrow \bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \sigma\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} \sim N(0, 1)$$

Så $100(1-\alpha)\%$ konf. int; σ känd:

$$\boxed{I_{\mu_X - \mu_Y} = \left[\bar{X} - \bar{Y} - \lambda_{\alpha/2}\,\sigma\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}},\ \bar{X} + \bar{Y} + \lambda_{\alpha/2}\,\sigma\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}\right]}$$

Om σ okänd så skattar vi med "pooled variance" S_p^2:

$$S_X^2 = \frac{1}{n_X - 1} \sum (x_i - \bar{x})^2 \quad S_Y^2 = \frac{1}{n_Y - 1} \sum (y_i - \bar{y})^2$$

$$S_p^2 = \frac{(n_X - 1) S_X^2 + (n_Y - 1) S_Y^2}{n_X + n_Y - 2}$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}} \sim t(n_X + n_Y - 2)$$

Så $100(1-\alpha)\%$ konf int, σ okänd

$$I_{\mu_X - \mu_Y} = \left[\bar{X} - \bar{Y} - t(n_X + n_Y - 2)_{\alpha/2} S_p \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}, \right.$$

$$\left. \bar{X} - \bar{Y} + t(n_X + n_Y - 2)_{\alpha/2} S_p \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}} \right]$$