

Olika typer av tal

Vi skall se hur vi utgående från de naturliga talen kan konstruera de hela talen, de rationella talen och de reella talen och diskutera räknereglerna som de uppfyller.

Naturliga tal

Vi påminner lite om naturliga tal från delkurs 1.

För att räkna upp, numrera, räkna antal och jämföra används ofta *naturliga tal*. Med vår vanliga decimalnotation (basen 10) skrivs dessa

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \dots$$

Samma naturliga tal kan skrivas med andra beteckningssystem. T.ex. kan de skrivas i basen 2 (bara två siffror att memorera men längre – svårästa – tal):

$$0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, \dots$$

eller med romerska siffror (romarna hade ingen nolla):

$$\text{I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI} \dots$$

Dessa tal kan användas för att räkna upp föremål i ordning eller för att räkna antal föremål eller för att jämföra antalet föremål i två olika samlingar av sådana.

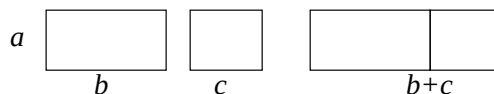
Om a och b är naturliga tal kan de adderas till ett nytt naturligt tal: $a + b$ är det totala antalet föremål i två olika samlingar av föremål där den ena har a stycken och den andra b .

Talen a och b kan också multipliceras till ett nytt naturligt tal: $a \cdot b$ är det totala antalet föremål i a olika samlingar där varje samling innehåller b föremål vardera. Vid räkning med bokstäver skrivs $a \cdot b$ vanligen ab .

Följande räknelagar gäller för addition och multiplikation:

R1	$(a + b) + c = a + (b + c)$	(associativitet)	$(ab)c = a(bc)$	(associativitet)
R2	$a + b = b + a$	(kommutativitet)	$ab = ba$	(kommutativitet)
R3	$0 + a = a$	(identitet)	$1 \cdot a = a$	(identitet)
R4	$a(b + c) = (ab) + (ac) = ab + ac$ (distributivitet)			
R5	$ab = 0$ precis när något av a eller b är $= 0$.			

För att illustrera distributiviteten kan man rita figuren



I detta sammanhang används konventionen att om addition och multiplikation förekommer i ett och samma uttryck ska multiplikation utföras före addition. T.ex. ska $3 \cdot 5 + 2$ betyda $(3 \cdot 5) + 2$ och **inte** $3(5 + 2)$ (vilket skulle innebära att additionen utfördes före multiplikationen).

För att svara på frågan "Hur mycket mer är a än b ?" kan man använda *subtraktion*. Svaret på frågan betecknas $a - b$. Här dyker självfallet problemet att a kan vara mindre än b upp. I så fall är subtraktionen inte möjlig så länge man håller sig till enbart naturliga tal.

För att svara på frågan "Hur många föremål innehåller varje hög om a föremål ska fördelas lika i b högar?" kan man använda *division*. Svaret på frågan betecknas a/b , men division är självfallet inte alltid möjlig, så länge man håller sig till enbart naturliga tal. Divisionen går i allmänhet inte "jämnt ut".

Lite talteori

Vi betraktar de naturliga talen, $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Övning 1: Lägg/rita 20 knappar (el. likn.) i jämna rader med lika många knappar i varje rad på så många sätt du kan.

Gör samma sak med 13 knappar.

Ser du någon skillnad? □

Det vi, och "minsta barn", kan se är att tjugo knappar kan läggas i en rad med tjugo knappar, i två rader med tio knappar i varje, i fyra rader med fem i varje, i fem rader med fyra i varje, i tio rader med två i varje och i tjugo rader med en enda knapp i varje rad.

Dessa uppdelningar motsvarar att 20 kan skrivas som produkt av två tal på många sätt: $20 = 1 \cdot 20 = 2 \cdot 10 = 4 \cdot 5 = 5 \cdot 4 = 10 \cdot 2 = 20 \cdot 1$.

Det matematiska uttryckssättet för detta är att talen 2, 4, 5, och 10 är (äkta) delare till talet 20. Naturligtvis är 1 och 20 också delare till 20 men det är inte så intressant att påpeka eftersom det är så självklart sant.

Ett annat sätt att uttrycka att $2 \cdot 10 = 20$ är att säga att 20 är en multipel av 10. Naturligtvis är 20 också multipel av 2.

De tretton knapparna kan däremot läggas antingen i en eller i tretton rader. Talet 13 har inga äkta delare, de enda sätten vi kan skriva 13 som produkt av två tal är $13 = 1 \cdot 13 = 13 \cdot 1$. Talet 13 är ett primtal.

Några **definitioner**:

Låt a och b vara naturliga tal.

Talet a är **delbart med** b om och endast om det finns ett naturligt tal c så att $a = b \cdot c$. Vi säger då också att b **delar** a eller att b är **delare till**, **divisor till** eller **faktor i** a och att a är en **multipel** av b . Detta skrivs $b|a$.

Eftersom $a = 1 \cdot a$ är a är delare till sig självt och 1 är delare till alla tal.

Om b är delare till a där $b \neq 1$ och $b \neq a$ så kallas b **äkta delare** till a . Tal som är större än 1 och som saknar äkta delare kallas **primaltal**, tal som har äkta delare kallas **sammansatta tal**. Talet 1 är en enhet och kallas varken primaltal eller sammansatt.

Anmärkning. Delbarhet kan även diskuteras för negativa heltal, men eventuella minustecken kan också behandlas separat.

Talet 13 är som redan nämnts ett primaltal, talet 20 kan skrivas som primtalsprodukt $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$. I den sista produkten kan faktorernas ordning varieras, bortsett från detta så är faktorruppleningen unik.

Talet 2 är ett primaltal, så är också 3. Multiplerna av 2 och av 3 är sammansatta tal. Talen 4, 6, 8, 10, 12, ... och 6, 9, 12, 15, 18, 21, ... är alltså sammansatta. Talen 5, 7 och 11 är också primaltal.

Det är relativt enkelt att avgöra om ett visst tal är ett primaltal under förutsättning att talet inte är så särskilt stort. För tal mindre än 100 räcker det ju att konstatera om det finns i någon av "multiplikationstabellerna" för tal mindre än 10, båda faktorerna kan inte vara större än 9. Dessutom finns en del enkla tester för delbarhet vilket reducerar ansträngningen väsentligt.

Övning 2: Delbarhetstester:

Ett tal är delbart med 2 omm (om och endast om) entalssiffran är delbar med 2.

Ett tal är delbart med 3 omm siffersumman är delbar med 3.

Ett tal är delbart med 4 omm talet bildat av de två sista siffrorna är delbart med 4.

Ett tal är delbart med 5 omm entalssiffran är 0 eller 5.

Ett tal är delbart med 6 omm det är delbart med 2 och 3.

Ett tal är delbart med 8 omm talet bildat av de tre sista siffrorna är delbart med 8.

Ett tal är delbart med 9 omm siffersumman är delbar med 9.

Ett tal är delbart med 11 omm den alternerande siffersumman är delbar med 11. $\square$

Vi ser nu enkelt att 97 inte är delbart med 2, 3 eller 5. Talet 7 är ju varken jämnt eller 5, siffersumman $9 + 7 = 16$ är inte delbar med 3. Då kan 97 inte heller vara delbart med 4, 6, 8 eller 9. 7-ans multiplikationstabell innehåller 91 och 98 men inte 97. Således är 97 ett primaltal, det enda mellan 90 och 100.

För stora tal är det däremot tidsödande att avgöra om talet är ett primaltal eller ej, till och med om det är ett datorprogram som genomför undersökningen.

Frågor om primaltal ställdes redan av grekerna, flera av Euklides böcker behandlade talteori, den nionde behandlade primaltal. Intresset för primaltal är minst lika stort nuförtiden, men av helt nya skäl: kryptering. Tag två stora primaltal, deras produkt är då ett mycket stort tal. Det är därför väldigt svårt att lista ut vilka tal som multiplicerats. Detta är basen för RSA-kryptot; så länge ingen snabb metod för faktorisering finns kan man utan risk publicera denna produkt och krypteringsmetoden utan att det krypterade meddelandet kan forceras, för dekrypteringsmetoden är bara känd för den som vet faktorerna och ingen utom mottagaren behöver veta dem.

En av de satser som Euklides presenterade är

Aritmetikens fundamentalsats: Varje naturligt tal som är större än 1 kan skrivas som en produkt av primtal. Bortsett från ordningsföljden är primtalsfaktorerna entydigt bestämda.

En annan är satsen som säger att det finns hur stora primtal som helst och alltså att det inte heller bara finns ändligt många.

Sats Det finns oändligt många primtal.

Bevis Antag att det finns ändligt många primtal. Bilda produkten av alla dessa och lägg till 1. Det tal som då erhålls är större än alla primtalen. Det är dessutom inte delbart med något av primtalen. Då måste det vara ett primtal vilket naturligtvis är orimligt. Produkten måste således vara omöjlig att bilda, antalet primtal kan inte vara ändligt.

Det är alltså omöjligt att ge en lista över alla primtal, men man kan naturligtvis ge en lista av alla primtal upp till ett visst tal. Denna lista kan sedan ligga till grund då ett visst tal skall skrivas som produkt av primtal.

Vi konstaterade ovan att det för att avgöra om ett tal mindre än 100 är ett primtal räcker att konstatera om talet finns i någon av "multiplikationstabellerna" för tal mindre än 10. Generellt gäller att ett tal n är ett primtal om det inte är multipel av något tal mindre än $\sqrt{n}$. En konsekvens av Aritmetikens fundamentalsats är att det räcker att konstatera att det inte är multipel av något mindre *primtal*. Om vi t.ex. vill undersöka om talet 39917 är ett primtal så kan vi undersöka om det är multipel av något primtal mindre än 200. ($\sqrt{39917} \approx \sqrt{40000} = 200$.)

Den enkla observationen att primtal är tal som inte är multipler av mindre primtal ligger bakom det som kallas Eratosthenes primtalssäll från ca 230 fvt, en metod för att bestämma alla primtal som är mindre än ett visst tal. Jag åskådliggör metoden genom att bestämma alla primtal mindre än 50.

Skriv upp alla tal 2, 3, 4, 5, ..., 50.

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34
35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50

Stryk alla multipler av 2 (utom 2).

2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ 9 ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ 15 ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ 21 ~~22~~ 23 ~~24~~ 25 ~~26~~ 27 ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ 33 ~~34~~
35 ~~36~~ 37 ~~38~~ 39 ~~40~~ 41 ~~42~~ 43 ~~44~~ 45 ~~46~~ 47 ~~48~~ 49 50

Stryk alla multipler av 3 (utom 3).

2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ 16 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~ 25 ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~
35 ~~36~~ 37 ~~38~~ ~~39~~ ~~40~~ 41 ~~42~~ 43 ~~44~~ ~~45~~ ~~46~~ 47 ~~48~~ 49 50

Nästa ostrukna tal i listan är 5, stryk alla multipler av 5 (utom 5).

2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ 16 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~ ~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~
~~35~~ ~~36~~ 37 ~~38~~ ~~39~~ ~~40~~ 41 ~~42~~ 43 ~~44~~ ~~45~~ ~~46~~ 47 ~~48~~ 49 50

Vi har nu nått primtalet 7. Vi upprepar proceduren (endast 49 är inte redan struket).

2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ ~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~ ~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~
~~35~~ ~~36~~ 37 ~~38~~ ~~39~~ ~~40~~ 41 ~~42~~ 43 ~~44~~ ~~45~~ ~~46~~ 47 ~~48~~ ~~49~~ 50

Eftersom 11 är större än $\sqrt{50}$ så är vi sedan klara; alla nu ostrukna tal är primtal.

Övning 3: Bestäm alla primtal mindre än 200.

(Denna övning förekommer i en nu använd lärobok för åk 5, dock utan förklarande text utöver procedurbeskrivningen.) □

Övning 4: Avgör om 39917 är ett primtal. □

Övning 5: Skriv följande tal som en produkt av primtal:

102, 111, 323, 519, 254, 1001, 1111, 11111.

□

Hela tal

Ett enkelt sätt att hantera problemet med subtraktion är att utöver de naturliga talen tänka sig att man även till varje sådant tal a har en negativ motsvarighet $-a$, med undantaget att $-0 = 0$. Man får då *heltalen*, som i decimalnotation skrivs:

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \dots, \pm 9, \pm 10, \pm 11, \dots$$

Utvidgningen av talsystemet från naturliga till hela tal görs alltså för att kunna hantera subtraktion utan restriktioner.

Additionen av de nya och gamla talen definieras nu om a och b är naturliga tal som

$$\begin{aligned} a + (-b) &= \begin{cases} a - b & \text{om } a \geq b \\ -(b - a) & \text{om } a < b \end{cases} \\ (-a) + (-b) &= -(a + b). \end{aligned}$$

Subtraktionen $a - b$ kan nu skrivas $a + (-b)$. Lägg märke till vändningen: från att ha uppfattats som en särskild operation har nu subtraktionen blivit ett specialfall av addition. De tidigare räknelagarna för addition fortsätter nu att gälla även för addition av heltal. (Att verkligen kontrollera dem är ganska jobbigt!) Utöver dessa har vi nu också

R6 $a + (-a) = 0$ för varje naturligt tal a .

$-a$ kallas *additiv invers* till a , men R6 säger också att a är additiv invers till $-a$ och vi skriver därför även $-(-a) = a$. Detta betyder att varje heltal x har en additiv invers $-x$.

Det går att bevisa räknelagarna för heltal från definitionen och räknelagarna för naturliga tal.

Vi nöjer oss med att verifiera den associativa lagen för talen 5, 6 och -13 , dvs. att

$$5 + (6 + (-13)) = (5 + 6) + (-13) .$$

För att beräkna vänsterledet observerar vi först att $6 + (-13) = -(13 - 6) = -7$ och får att $5 + (6 + (-13)) = 5 + (-7) = -(7 - 5) = -2$. För högerledet gäller $(5 + 6) + (-13) = 11 + (-13) = -(13 - 11) = -2$, så den associativa lagen stämmer i det här fallet.

Multiplikation av de nya och gamla talen definieras nu om a och b är naturliga tal som

$$a(-b) = -(ab)$$

$$(-a)b = -(ab)$$

$$(-a)(-b) = ab.$$

Motiveringen till den första definitionen är ganska enkel: om en skuld b multipliceras med a blir den nya skulden ab . Den andra kan motiveras med att om ett kapital bestående av ett (stort) antal poster vardera om b kronor minskas med a poster, så görs en förlust av ab kronor. En liknande motivering till den tredje skulle kunna vara att om en skuld bestående av ett (stort) antal poster vardera om b kronor minskas med a poster, så görs en vinst av ab kronor.

En mera matematisk motivering till den tredje är att den är en nödvändighet, om man vill att multiplikation av heltal alltid ska vara möjlig, och att samma räknelagar som tidigare ska fortsätta att gälla. Vi har att

$$0 = a \cdot 0 = a \cdot (b - b) = a \cdot (b + (-b)) = a \cdot b + a \cdot (-b),$$

så $a \cdot (-b)$ är additiv invers till ab , dvs. $a \cdot (-b) = -ab$.

På liknande sätt har man $(-a) \cdot b = -ab$.

Byter vi a mot $-a$ i kalkylen ovan får vi

$$0 = (-a) \cdot b + (-a) \cdot (-b) = -ab + (-a) \cdot (-b),$$

så $(-a) \cdot (-b)$ är additiv invers till $-ab$, dvs. är lika med $-(-ab)$, dvs. ab .

Denna förklaring till varför $(-2)(-3)$ ska sättas till 6 hänvisar inte till intuitionen. Motiveringen är i stället att *det måste vara så för att vissa räknelagar ska gälla*.

De tidigare räknelagarna för multiplikation av naturliga tal fortsätter nu att gälla även för multiplikation av heltal. Likaså fortsätter distributiviteten att gälla.

Efter utvidgning från de naturliga talen till de hela talen med tillhörande räkneoperationer är alltså subtraktion inte bara alltid möjlig, utan rent av en särskild form av addition.

Ett exempel på nyttan av de hela talen är att man kan förenkla uppgifter som bara handlar om naturliga tal.

Om vi t.ex. skall räkna ut $19 \cdot 19$ ”i huvudet” kan vi resonera så här.

$$\begin{aligned} 19 \cdot 19 &= (20 - 1) \cdot (20 - 1) = (20 + (-1))^2 = (\text{kvadreringsregeln}) \\ &= 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot (-1) + (-1)^2 = 400 - 40 + 1 = 361 . \end{aligned}$$

Rationella tal

Även om nu problemet med subtraktion är löst återstår problemet att division inte alltid är möjlig. T.ex. är det inte möjligt att dela upp en skuld på 5 odelbara enheter i 2 lika stora poster. Divisionsproblemet är minst lika fundamentalt som subtraktionsproblemet. Inte minst för barn är problemet att dela rättvist på en given kvantitet förmodligen mer konkret och viktigt än det kanske mer abstrakta skuldbegreppet.

För att lösa divisionsproblemet kan vi göra på ett liknande sätt som när vi införde negativa (hel)tal. Till varje positivt heltal a inför vi ett tal $\frac{1}{a}$ (skrivs även $1/a$) och tanken är att $a \cdot \frac{1}{a}$ ska vara 1. Speciellt gäller då $\frac{1}{1} = 1$.

För att konkretisera det kan vi tänka oss att a är positivt och att man delar en given sträcka (av längd 1) i a lika stora delar, där var och en av delarna då får längd $\frac{1}{a}$. Om då b är ett naturligt tal betyder $\frac{b}{a}$ längden av b stycken sådana sträckor.

Vi har alltså $\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a}$ och $\frac{b}{1} = b \cdot \frac{1}{1} = b \cdot 1 = b$.



Man kan också konkretisera detta genom att dela in en cirkel i a lika stora tårtbitar. Talet $\frac{2}{3}$ svarar mot att man delar in cirkeln i tre tårtbitar och sedan tar två av dessa. Om man i stället delar in cirkeln i sex tårtbitar blir dessa bitar hälften så stora och man behöver ta fyra sådana bitar för att få lika mycket tårta. Detta motiverar att $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

För godtyckliga positiva heltal får vi med samma resonemang att

$$\text{R7} \quad \frac{cb}{ca} = \frac{b}{a}.$$

För om en given sträcka delas i ca sträckor och man lägger cb sådana i följd, får man samma sträcka som om man delar den givna sträckan i a delar och lägger b av dem i följd.

De *rationella talen* består av alla kvoter $\frac{b}{a}$ där a och b är heltal och $a \neq 0$. Talet b kallas här *täljare* och talet a för *nämnare*. Talet $\frac{b}{a}$ kallas också ett *rationellt bråk*. Observera att ett och samma rationella tal kan skrivas på oändligt många olika sätt eftersom $\frac{b}{a} = \frac{cb}{ca}$ för varje heltal c som inte är 0. (Man kan säga att det finns oändligt många "namn" på ett och samma rationella tal.) Bland annat kan man alltid skriva rationella tal med positiv nämnare (välj $c = -1$ om a är negativt).

Om nämnarna är lika definieras addition av rationella tal av $\frac{b}{a} + \frac{b'}{a} = \frac{b+b'}{a}$; om vi har b "stycken" $\frac{1}{a}$ och lägger till b' "stycken" $\frac{1}{a}$ så har vi totalt $b+b'$ "stycken" $\frac{1}{a}$ (med uppenbar tolkning om b och/eller b' är negativt).

I det allmänna fallet definieras additionen av

$$\frac{b}{a} + \frac{b'}{a'} = \frac{ba' + ab'}{aa'}$$

och vi ser att om $a = a'$ så är detta lika med

$$\frac{ba + ab'}{aa} = \frac{a(b + b')}{aa} = \frac{b + b'}{a}$$

som förut.

Multiplikation definieras av

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{b'}{a'} = \frac{bb'}{aa'}$$

Speciellt gäller (om $a = 1$)

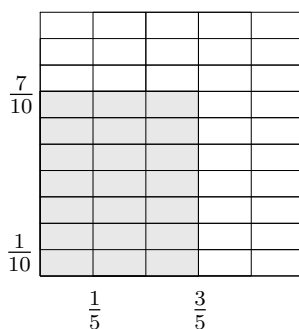
$$b \cdot \frac{b'}{a'} = \frac{bb'}{a'}$$

Det är lättast att motivera dessa definitioner om vi håller oss till fallet där täljarna är ≥ 0 och nämnarna är > 0 .

Om nämnarna är lika är det lätt att förstå den första räknelagen. Vänsterledet i $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$ betyder att man har tre "sjättedelstårtor" och två "sjättedelstårtor" och detta blir detsamma som fem "sjättedelstårtor".

För att addera tal med olika nämnare kan vi först förlänga $\frac{b}{a}$ och $\frac{b'}{a'}$ så att talen får samma nämnare: $\frac{b}{a} = \frac{ba'}{aa'}$ och $\frac{b'}{a'} = \frac{ab'}{aa'}$. Det första talet betyder då längden av ba' stycken sträckor av längd $\frac{1}{aa'}$ medan det andra betyder längden av ab' sådana sträckor. Additionen $\frac{b}{a} + \frac{b'}{a'}$ betyder då alltså längden av $ba' + ab'$ sådana sträckor, dvs $\frac{ba'+ab'}{aa'}$. Ofta finns förstås en gemensam multipel till a och a' som är mindre än aa' , t.ex. $\frac{2}{15} + \frac{5}{12} = \frac{2 \cdot 4 + 5 \cdot 5}{60} = \frac{33}{60}$. Denna gång går dessutom slutresultatet att förkorta trots att vi använde minsta gemensamma nämnaren; resultatet är lika med $\frac{11}{20}$.

För att motivera multiplikationen kan vi tänka oss att vi har en kvadrat med given sida (av längd 1). Vi delar in basen i a och höjden i a' lika långa delar. Vi får då ett rutmönster i kvadraten bestående av aa' stycken lika stora rektanglar. Varje rektangel är alltså en $\frac{1}{aa'}$ -del av kvadraten. $\frac{b}{a} \cdot \frac{b'}{a'}$ kan nu tolkas som att vi ska ha bb' sådana rektanglar, dvs $\frac{bb'}{aa'}$ delar av den ursprungliga kvadraten.



Om vi t.ex. skall beräkna $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{10}$ delar vi in basen i fem lika stora delar med längden $\frac{1}{5}$ och höjden i tio lika stora delar med höjden $\frac{1}{10}$. De små rektablarna i kvadraten får arean $\frac{1}{50}$. Multiplikationen $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{10}$ svarar nu mot arean av $3 \cdot 7$ sådana rektanglar och blir alltså $\frac{21}{50}$.

Observera att i räkningar kan det vara en fördel att inte genast multiplicera ihop för att inte missa möjliga förkortningar, t.ex. $\frac{4}{15} \cdot \frac{9}{14} = \frac{4 \cdot 9}{15 \cdot 14} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$. Detta exempel illustrerar också att vi vid multiplikation av bråk kan förkorta det ena bråkets täljare mot det andra bråkets nämnare.

Rationella tal som kan skrivas $\frac{a}{1}$ är, som redan påpekats, lika med a (där a är ett heltal). På så vis är de vanliga heltalen med i systemet av rationella tal. För denna utvidgning av systemet av heltal till systemet av rationella tal och tillhörande addition och multiplikation fortsätter de tidigare räknelagarna att gälla.

Vi har dessutom (om a och b är $\neq 0$)

$$\text{R8} \quad \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1 \text{ (multiplikativ invers).}$$

För de rationella talen är både subtraktion och division (med tal $\neq 0$) alltid möjlig och i själva verket specialfall av addition respektive multiplikation.

För subtraktion har vi

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{-c}{d} = \frac{ad + b(-c)}{bd} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

Division av $\frac{a}{b}$ med $\frac{c}{d} \neq 0$ kan uppfattas som att vi ska lösa ekvationen

$$\frac{c}{d} \cdot x = \frac{a}{b}.$$

Detta kan vi göra genom att multiplicera båda leden med den multiplikativa inversen till $\frac{c}{d}$, alltså med $\frac{d}{c}$:

$$\frac{d}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot x = \frac{d}{c} \cdot \frac{a}{b} \Leftrightarrow 1 \cdot x = \frac{da}{cb} \Leftrightarrow x = \frac{ad}{bc}.$$

Man kan också ställa upp räkningarna ut så här:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &= \left\{ \text{Förlängning med } \frac{d}{c} \right\} = \frac{\frac{a}{b} \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \frac{d}{c}} = \\ &= \frac{\frac{ad}{bc}}{\frac{cd}{dc}} = \frac{\frac{ad}{bc}}{1} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \end{aligned}$$

Division med $\frac{c}{d} \neq 0$ är alltså samma sak som multiplikation med $\frac{d}{c}$.

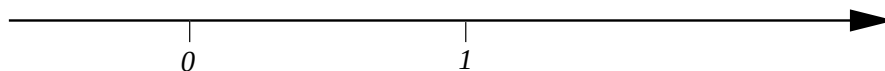
De reella talen

Det mest centrala systemet av tal i matematiken är de *reella talen*. Liksom systemen av naturliga, hela och rationella tal har det uppstått från primitiva mänskliga aktiviteter – i detta fall från mätning och jämförelse av olika typer av storheter. Det kan till exempel vara fråga om mätning av längder och avstånd och vägning av vikter.

Jämförelse av två mått A och B på en storhet (t.ex. längd) kan i sin enklaste variant gå ut på att avgöra om A är större än B eller inte. Man kan säga att det här är fråga om en kvalitativ jämförelse.

Lite mer avancerat är att göra en kvantitativ jämförelse: "Hur mycket större än B är A ?". För att besvara denna typ av frågor utgår mänskligheten från *skalor*. När en enhet på en sådan skala fastlagts blir skalan en skala av tal. Det är förstås välbekant men anmärkningsvärt, att en enda typ av skala av tal kan användas för att beskriva en stor variation av kvalitativa jämförelser: avstånd, vikt, längd, temperatur, tid osv.

Den skala av tal, de reella talen, vi använder oss av brukar illustreras med en rät linje med ett valt origo (nollpunkt), en bestämd enhetspunkt och en (positiv) riktning. Man understryker alltså de reella talens användning som avståndsskala.



Att denna skala är så fundamental beror framför allt på att den är fullständig.

Om man tänker sig att man illustrerar de rationella talen på en längdskala på samma sätt, kommer figuren att se likadan ut som den reella skalan. Mellan två rationella tal vilka som helst finns det nämligen oändligt många andra rationella tal. Ändå finns det luckor i den rationella tallinjen. En avgörande historisk upptäckt var att längden av diagonalen i en kvadrat med sidan 1 **inte** kan mätas med ett rationellt tal. (Enligt Pythagoras' sats är diagonalens längd $\sqrt{2}$ och det är ganska lätt att se att det inte finns något rationellt tal a/b vars kvadrat är 2.)

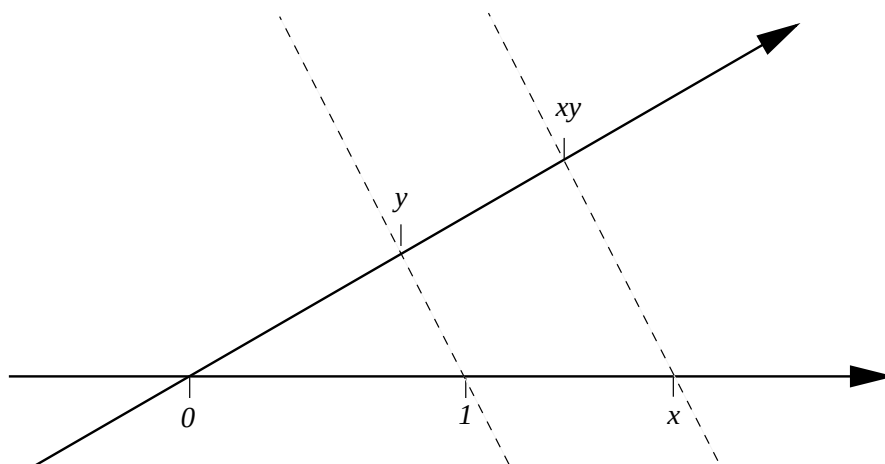
Fullständigheten hos de reella talen garanterar att den reella tallinjen inte har några sådana luckor.

När två föremål läggs i följd eller sida vid sida, är storleken av denna kombination summan av de två föremålens storlek, oavsett om det gäller deras vikt eller volym. Geometriskt består addition av att lägga sträckor (eventuellt med tecken eller riktning) i följd längs en linje. Denna geometriska operation motsvarar (aritmetisk) addition av reella tal.

Mått på olika typer av storheter kan i första omgången lätt multipliceras med heltal – för att multiplicera vikten av ett föremål med 3 kan man ta den gemensamma vikten av tre sådana föremål. Multiplikation med rationella tal kan sedan göras med uppdelning i lika tunga delar. Multiplikation med ett reellt tal kan sedan göras med hänvisning till de reella talens "kontinuitet". (Avgörande är att det till ett reellt tal alltid finns rationella tal godtyckligt nära det. Mer om detta nedan.)

Praktiska sätt att addera och multiplicera mått av storheter leder till (aritmetisk) addition och multiplikation av reella tal.

Som påpekats ovan kan additionen illustreras med (riktade) sträckor som läggs kant i kant. Med hjälp av likformighet kan man ge en geometrisk illustration till multiplikation av reella tal.



Lägg två reella tallinjer i planet så att de skär varandra i ett gemensamt origo. Markera x på den ena linjen och y på den andra. Drag sedan en linje dels genom 1 på den tallinje där

x markerats, och dels genom y på den andra linjen (den streckade linjen till vänster i figuren ovan). Drag sedan en linje parallell med denna fast nu genom x (den streckade linjen till höger i figuren ovan). Denna nya linje skär då tallinjen med y i en punkt z . I figuren har det nu uppstått två likformiga trianglar (den ena inuti den andra). Likformigheten ger $z/x = y/1$ eller $z = xy$.

Liksom för det rationella talsystemet är subtraktion och division alltid möjlig och specialfall av addition och multiplikation.

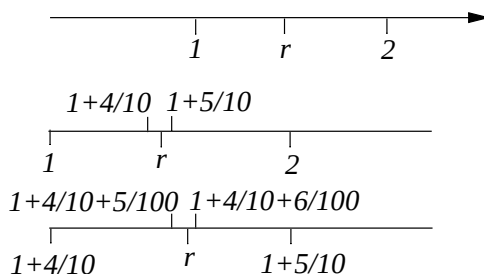
Att subtrahera y från x är samma sak som att addera x och $-y$, $x - y = x + (-y)$.

Att dividera x med y är samma sak som att multiplicera x med $1/y$, $x/y = x \cdot (1/y)$.

(Tänk igenom hur man kan konstruera $1/y$.)

Än så länge har vi inte skrivit upp de reella talen med siffror på samma sätt som vi gjort med de naturliga, hela och rationella talen.

Möjligheten att göra detta bygger på egenskapen att det till ett reellt tal r finns rationella tal som ligger godtyckligt nära r (även om r inte självt är ett rationellt tal).



För att inse detta när $r > 0$ väljer vi först det största heltalet $a \leq r$. Då ligger r mellan a och $a + 1$ d.v.s. $a \leq r < a + 1$. Eftersom vi är vana att arbeta med namn på tal i basen 10 delar vi in sträckan från a till $a + 1$ i 10 lika delar vardera av längd $1/10$. Vi väljer det största heltal a_1 så att $a + a_1/10 \leq r$. Då ligger r mellan $a + a_1/10$ och $a + (a_1 + 1)/10$: $a + a_1/10 \leq r < a + (a_1 + 1)/10$. Vi lägger märke till att a_1 är ett heltal mellan 0 och 9, och fortsätter nu med att dela upp sträckan mellan $a + a_1/10$ och $a + (a_1 + 1)/10$ i 10 lika delar vardera av längd $1/100$ och väljer det största heltal a_2 så att $a + a_1/10 + a_2/100 \leq r$ och lägger märke till att a_2 är ett heltal mellan 0 och 9. Proceduren kan upprepas i evighet och vi får att

$$r = a + a_1/10 + a_2/100 + a_3/1000 + \dots,$$

där a är ett heltal och $a_1, a_2, a_3, \dots$ är heltal mellan 0 och 9. Vårt vanliga sätt att skriva detta är

$$r = a, a_1 a_2 a_3 \dots$$

Vi säger att vi skrivit (eller utvecklat) r som ett (oändligt) decimaltal (decimalbråk). Det är viktigt att förstå att utvecklingen i allmänhet inte slutar med en oändlig sekvens av nollor.

Låt oss se hur detta fungerar i ett konkret exempel, nämligen att bestämma början på decimalutvecklingen av $\sqrt{2}$. Det största heltalet som är mindre än $\sqrt{2}$ är 1 eftersom $1^2 = 1 < 2$ och $2^2 = 4 > 2$. Så i utvecklingen

$$\sqrt{2} = a, a_1 a_2 a_3 \dots$$

är alltså $a = 1$. För att bestämma den första decimalen observerar vi att $1,4^2 = 1,96 < 2$ och $1,5^2 = 2,25 > 2$ så $a_1 = 4$. Den andra decimalen blir 1 eftersom $1,41^2 = 1,9881 < 2$ och $1,42^2 = 2,0164 > 2$. Så decimalutvecklingen av $\sqrt{2}$ börjar

$$\sqrt{2} = 1,41 \dots$$

Genom att fortsätta på detta sätt kan vi räkna ut fler och fler decimaler till $\sqrt{2}$. Min räknedosa ger

$$\sqrt{2} = 1,414213562 \dots$$

Det går att räkna ut ännu fler decimaler och det finns ingen gräns för hur många decimaler man kan räkna ut. Däremot går det inte att räkna ut *alla* decimalerna i det oändliga decimalbråket för $\sqrt{2}$.

Eftersom de reella talen i allmänhet har en oändlig decimalbråksutveckling fungerar inte våra vanliga algoritmer för addition och multiplikation (av naturliga tal) för reella tal; vi har ingenstans att börja. I praktiken klarar vi (och räknedosor och datorer) detta genom att räkna reella tal bara med ett visst antal decimalers noggrannhet. Nackdelen med detta är att då gäller inte de vanliga räknelagarna längre. Om vi t.ex. bestämmer oss för att konsekvent räkna enbart med tre decimaler har vi

$$(8000 \cdot 0,031) \cdot 0,001 = 248,000 \cdot 0,001 = 0,248$$

men

$$8000 \cdot (0,031 \cdot 0,001) = 8000 \cdot 0,000 = 0,000.$$

De rationella talen finns ju med bland de reella och det är naturligt att undra vilka decimalutvecklingar som ger rationella tal. En decimalutveckling är avslutad om den slutar med en oändlig sekvens av nollor. Normalt skriver vi förstås inte ut dessa utan skriver t.ex. 2,3245. Varje reellt tal r med avslutad decimalutveckling är rationellt, eftersom det blir ett heltal efter multiplikation med 10^n där n är antalet decimaler. Om t.ex. $r = 2,3245$ är $10^4 r = 23245$ och $r = 23245/10000$.

En decimalutveckling är periodisk om utvecklingen slutar med en oändlig upprepning av en ändlig sekvens av siffror. T.ex. är 52,123123123123... periodiskt eftersom utvecklingen avslutas med en evig uppräknings av 123. Ett reellt tal r med periodisk decimalutveckling är också rationellt. Efter multiplikation med 10^k där k är antalet siffror i perioden avslutas utvecklingen av r och $10^k r$ på samma vis. Därför har $10^k r - r = (10^k - 1)r$ avslutad decimalutveckling och är alltså rationellt. Division med $10^k - 1$ ger sedan att r är en kvot mellan två heltal. Om t.ex. $r = 52,123123123123 \dots$ gäller

$$\begin{aligned} 10^3 r &= 52123,123123123123 \dots \\ r &= 52,123123123123 \dots \end{aligned}$$

så att

$$999r = (10^3 - 1)r = 52123 - 52 = 52071$$

och

$$r = 52071/999 = 17357/333 \text{ (fullständigt förkortat – visa det).}$$

Å andra sidan ger en decimalutveckling av ett rationellt tal (enligt den divisionsalgoritm vi känner till) alltid antingen ett avslutat eller ett periodiskt decimalbråk. Om vi t.ex. utför divisionsalgoritmen för a/b skall vi successivt utföra divisioner med b på tal som vi efter ett tag får genom att multiplicera divisionsrester med 10. Det finns bara ett ändligt antal möjliga rester vid division med b så efter ett tag kommer antingen resten 0, och decimalutvecklingen avslutas, eller en rest som förekommit förut, och decimalutvecklingen upprepas.

Följande räkning illustrerar decimalutvecklingen av $7/11$:

$$\begin{array}{r} 0,63 \\ 11 \overline{) 7,00} \\ \underline{66} \\ 40 \\ \underline{33} \\ 7 \end{array}$$

Nu gäller det att dela 7 med 11, dvs. samma problem som vi startade med. Räkningarna kommer därför att upprepas och vi får

$$\frac{7}{11} = 0,6363636363 \dots$$

Lägg dock märke till att $7/11$ är ett tal i sig och inte en uppgift att beräkna.

Man använder också beteckningen x/y för kvoten mellan två reella tal.

Potensräkning

Om b är ett positivt heltal och a är vilket tal som helst, så betyder a^b , "a multiplicerat med sig själv b gånger", dvs

$$a^b = a \cdot a \cdot \dots \cdot a.$$

T ex är $10^2 = 100$ och $2^{10} = 1024$. Ur denna *definition* följer

Potenslagarna:

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}, (a^b)^c = a^{b \cdot c} \text{ och } a^c \cdot b^c = (ab)^c$$

vilket man inser genom att räkna antalet faktorer i båda leden.

T ex är $10^2 \cdot 10^3 = 10^5$, $(2^3)^2 = 2^6$ och $2^3 \cdot 5^3 = 10^3$.

Man utvidgar sedan definitionen, så att b kan vara vilket heltal som helst, genom att sätta (om a inte är 0!)

$$a^0 = 1$$

och

$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}.$$

Så måste man göra för att potenslagarna fortfarande ska gälla. (*Kolla att de gör det!*)

Man kan också definiera a^b om a är positivt och b är rationellt (dvs ett bråktal) genom att låta $a^{\frac{1}{q}}$ vara den q :te roten ur a och sedan $a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p$. T ex är $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$, $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$ och $4^{\frac{5}{2}} = \sqrt{4^5} = 2^5 = 32$. Om q är udda kan a vara negativt.

Komplexa tal

När man löser andragradsekvationer kan det hända att man får ett negativt tal under rot-tecknet. Det enklaste exemplet är

$$x^2 + 1 = 0 \text{ eller } x^2 = -1 .$$

Det finns inget reellt tal vars kvadrat är negativ så en sådan andragradsekvation saknar reella lösningar. För att lösa detta problem inför man de komplexa talen (analogt med att man inför negativa och rationella tal för att kunna lösa vissa ekvationer).

Ett komplext tal z kan skrivas $z = x + iy$ där x och y är reella tal och i den "imaginära enheten", ett nytt tal med egenskapen att $i^2 = -1$. Man räknar sedan med dessa komplexa tal "som vanligt" plus den extra räknelagen att $i^2 = -1$.

Man kan nu vara orolig för att den här processen aldrig tar slut och att man ständigt måste införa nya typer av tal.

Lyckligtvis är det inte så. Ett vackert matematiskt resultat, "Algebrans fundamentalsats", säger nämligen att varje polynomekvation (med komplexa koefficienter) har en lösning som är ett komplext tal.

Restklassaritmetik (kongruensräkning, modulär aritmetik)

Exempel 1. Pelle har varit på långsemester i 40 dagar. Han åkte på en lördag. Vad var det för veckodag när han kom tillbaka?

Vi numrerar veckodagarna så att måndag är dag 1, tisdag dag 2, ..., lördag dag 6 och söndag dag 7. Om vi räknar in resdagarna i de 40 dagarna Pelle var borta så gäller att Pelle kom tillbaks på dag nummer $6 + 40 = 6 + 42 - 2 = 4 + 6 \cdot 7$. Eftersom det finns 7 dagar i veckan kom Pelle tillbaka på veckodag 4 dvs. på en torsdag. $\square$

Exempel 2. Eva föddes nyårsdagen 2005. Vad är det för veckodag när hon fyller femtio år?

Nyårsdagen 2005 var en lördag eller dag 6. Varje år har 365 dagar förutom skottåren som har 366 dagar. Det första skottåret efter 2005 är 2008 och sedan är det skottår vart fjärde år fram tills Eva har fyllt femtio. Det blir totalt 12 skottår (Varför?) mellan 2005 till 2055. Så det går $50 \cdot 365 + 12$ dagar tills Eva fyller femtio. Så hon fyller år på veckodag $6 + 50 \cdot 365 + 12 = 18 + (7 \cdot 7 + 1)(7 \cdot 52 + 1) = 7 \cdot 2 + 4 + 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 52 + 7 \cdot 7 + 7 \cdot 52 + 1 = 7 \cdot (2 + 7 \cdot 7 \cdot 52 + 7 + 52) + 5$. Den första termen är ett helt antal veckor så femtioårsdagen inträffar på dag 5, dvs. en fredag. $\square$

Exempel 3. Vad visar minutvisaren 3672 minuter efter 12.37?

Vi har $3672 = 3600 + 72 = 60 \cdot 60 + 60 + 12 = 60 \cdot 61 + 12$. Alltså visar minutvisaren $37 + 12 = 49$. $\square$

I dessa exempel ser vi att det viktiga inte är vad ett visst tal är utan bara talets rest vid division med 7 (i Exempel 1 & 2) respektive 60 (i Exempel 3).

För att kunna räkna på ett enkelt sätt i en sådan situation gör vi följande

Definition

Låt n vara ett fixt positivt heltal. Då gäller

$$a \equiv b \pmod{n}$$

om $a - b$ är jämnt delbart med n .

□

Vi utläser $a \equiv b \pmod{n}$ som ” a och b är kongruenta modulo n ”.

Ett annat sätt att uttrycka att $a \equiv b \pmod{n}$ är att det finns något heltal s sådant att $a = b + s \cdot n$.

Man kan också säga att a och b har samma rest vid division med n .

Denna beskrivning gör tydligt att kongruens modulo n är en ekvivalensrelation, dvs. den uppfyller

Reflexivitet: $a \equiv a \pmod{n}$

Symmetri: Om $a \equiv b \pmod{n}$ så $b \equiv a \pmod{n}$

Transitivitet: Om $a \equiv b \pmod{n}$ och $b \equiv c \pmod{n}$ så $a \equiv c \pmod{n}$.

Heltalen indelas då i *restklasser* efter vilken rest de ger vid division med n .

Exempel. Modulo 3 har vi restklasserna

$$\begin{aligned} [0] &= \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\} \\ [1] &= \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\} \\ [2] &= \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\} \end{aligned}$$

Det gäller $[-6] = [-3] = [0] = [3] = [6]$, $[-5] = [-2] = [1] = [4] = [7]$ osv.

Att ett tal a är jämnt delbart med n betyder att $a \equiv 0 \pmod{n}$. Detta är ett kraftfullt sätt att visa att ett tal är delbart med n . Mer om detta om en stund.

Vi tittar igen på exemplen ovan.

1. $46 \equiv 4 \pmod{7}$ eftersom $46 - 4 = 42$ är jämnt delbart med 7.
2. $6 + 50 \cdot 365 + 12 \equiv 5 \pmod{7}$ eftersom $6 + 50 \cdot 365 + 12 - 5 = 18263 = 7 \cdot 2609$ är jämnt delbart med 7.
3. $3672 \equiv 12 \pmod{60}$ eftersom $3672 - 12 = 3660$ är jämnt delbart med 60.

Räkneregler

Låt n vara ett positivt heltal, k ett godtyckligt heltal, och antag att $a \equiv b \pmod{n}$ och $c \equiv d \pmod{n}$. Då gäller

$$ak \equiv bk \pmod{n} \tag{1}$$

$$a + c \equiv b + d \pmod{n}, \tag{2}$$

och

$$ac \equiv bd \pmod{n}. \tag{3}$$

□

Bevis av (3): Vi har att $a = b + s \cdot n$ och $c = d + t \cdot n$ för vissa heltal s och t , så $ac = (b + sn)(d + tn) = bd + btn + snd + stn^2 = bd + (bt + sd + stn) \cdot n$, så $ac \equiv bd \pmod{n}$ eftersom $bt + sd + stn$ är ett heltal. $\square$

Subtraktion fungerar också "modulo n ".

Om $a \equiv b$ och $c \equiv d$ så gäller $a - c \equiv b - d$. (Här har vi underförstått "mod n ", det kan man göra när den s.k. modulen n framgår av sammanhanget.) Däremot går det i allmänhet inte att dividera kongruenser. T.ex. gäller $9 \equiv 3 \pmod{6}$, men $3 \not\equiv 1 \pmod{6}$, så det går alltså inte att dividera med 3. Ett annat exempel på att kongruensräkning skiljer sig från heltalsaritmetik att produkten av två tal som inte är noll kan bli noll. Ett sådant exempel är att trots att $2 \not\equiv 0 \pmod{6}$ och $3 \not\equiv 0 \pmod{6}$ så är $2 \cdot 3 = 6 \equiv 0 \pmod{6}$.

Låt oss nu se hur vi kan använda vårt "nya sätt att räkna" på de inledande exemplen.

Exempel 1. I detta och nästa exempel låter vi $\equiv$ betyda kongruens modulo 7. Eftersom $6 \equiv -1$ och $40 = 35 + 5 \equiv 5$ gäller

$$6 + 40 \equiv -1 + 5 = 4,$$

så Pelle kom hem på en torsdag.

Exempel 2. Eftersom $6 \equiv -1$, $12 \equiv 5$, $50 \equiv 1$ och $365 \equiv 1$ gäller

$$6 + 50 \cdot 365 + 12 \equiv -1 + 1 \cdot 1 + 5 \equiv 5,$$

så Eva fyller femtio på en fredag.

Exempel 3. Vi räknar modulo 60. Vi har $37 + 3672 = 37 + 3660 + 12 \equiv 37 + 12 = 49$ så minutvisaren står på 49.

Ett annat exempel är att om vi vill beräkna sista siffran i ett tal, t.ex. 37^{23} , så observerar vi att sista siffran fås som resten vid division med 10. Nu gäller modulo 10 att

$$37^{23} \equiv (-3)^{23} = (-3)^{2 \cdot 11 + 1} = (-3) \cdot ((-3)^2)^{11} = -3 \cdot (9)^{11} \equiv -3 \cdot (-1)^{11} = -3 \cdot (-1) = 3.$$

För att se hur kraftfull kongruensräkning är kan du fundera på hur man skulle beräkna sista siffran i 37^{23} med "vanlig" aritmetik. En annan metod är dock att observera att vid upprepad multiplikation av ett tal som slutar på 7 med sig självt så får man successivt tal med slutsiffror 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, $\dots$, alltså ett periodiskt förlopp med period 4, så det gäller att finna var 23 passar in, m.a.o. vad 23 är modulo 4.

Våra delbarhetsregler kan lätt verifieras med kongruensräkning. Vi har t.ex.

Ett heltal är delbart med 11 precis då dess alternerande siffersumma är delbar med 11.

Detta beror på att talen 11, 1001, 100001, $\dots$ och 99, 9999, 999999, $\dots$ är delbara med 11, dvs. att $10^n + 1$ är delbart med 11 om n är udda och $10^n - 1$ är delbart med 11 om n är jämnt. Detta kan vi lätt visa genom att räkna modulo 11. Att ett tal k är delbart med 11 är samma sak som att $k \equiv 0$. Eftersom $10 \equiv -1$ gäller $10^n \equiv (-1)^n$. Om n är udda får vi $10^n \equiv -1$ eller $10^n + 1 \equiv 0$, om n är jämnt får vi i stället $10^n \equiv 1$ eller $10^n - 1 \equiv 0$.

Räkningen kan ställas upp så här: vi betraktar talet $a = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0$, där $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ är siffrorna då a skrivs i bas 10 som vanligt, så (modulo 11)

$$\begin{aligned} a &= a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_n \cdot 10^n \\ &\equiv a_0 + a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot (-1)^2 + \dots + a_{n-2} \cdot (-1)^{n-2} + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + a_n \cdot (-1)^n \\ &= a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_{n-2} \cdot (-1)^{n-2} + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + a_n \cdot (-1)^n. \end{aligned}$$

Talet ger alltså samma rest vid division med 11 som sin alternerande siffersumma.

Ekvationer och olikheter

En ekvation är en likhet där båda leden kan innehålla en eller flera obekanta ($x, y, a \dots$).
Exempel:

$$2x + 3 = 5, \quad x + 3y = 5 + y, \quad 7 = 3$$

är ekvationer. I en ekvation får man addera vilket tal som helst till båda sidorna och man får då en ekvation som är *ekvivalent* med den ursprungliga ekvationen. (”Ekvivalent” betyder här att den nya ekvationen har samma lösningar. *Varför har den det?*) Talet man får lägga till kan också vara negativt, dvs. man kan även subtrahera samma tal från båda sidor. T.ex. är ekvationen

$$2x + 3 - 3 = 5 - 3$$

ekvivalent med den första. Detta kan också skrivas

$$2x = 5 - 3, \quad 2x = 2.$$

Ofta bakar man ihop de två stegen till ett, dvs. man går direkt från $2x + 3 = 5$ till $2x = 5 - 3$. Detta brukar man formulera så att man flyttar över 3 till andra sidan av likhetstecknet och ändrar tecken.

I en ekvation får man också multiplicera båda leden med vilket nollskilt tal som helst och man får även då en ekvation som är ekvivalent med den ursprungliga. Eftersom talet kan vara ett bråktal betyder det att man också för dividera båda leden med samma tal. T.ex. kan man gå från

$$2x = 2$$

till

$$2x \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2}$$

vilket kan skrivas

$$x = \frac{2}{2}, \quad x = 1.$$

Också här bakar man ofta ihop de två stegen till ett och går direkt från t.ex. $15x = y$ till $x = \frac{y}{15}$. Detta brukar man formulera så att man flyttar 15 till andra sidan likhetstecknet och sätter det under bråkstrecket.

Olikheter

Olikheter, dvs. uttryck av typen

$$2x + 3 > 5$$

får behandlas på precis samma sätt – med ett viktigt undantag. Det tal som man multiplicerar med måste vara positivt. Följande är alltså korrekt:

$$2x + 3 > 5, \quad 2x > 2, \quad x > 1$$

men

$$2x + 3 > 5, \quad 2x - 2 > 0, \quad -2 > -2x, \quad 1 > x$$

är inte korrekt (eftersom vi har dividerat med -2 i sista steget). Det sista ledet skall i stället vara $1 < x$: *multiplikation eller division med ett negativt tal leder till att olikheten byter riktning.*

ÖVNINGAR

1. I texten illustreras räknelagen $a(b + c) = ab + ac$ för naturliga tal. Hur illustrerar man på liknande sätt att $ab = ba$ och att $(ab)c = a(bc)$?
2. Vi har en algoritm för att beräkna produkten av flersiffriga naturliga tal utgående från en multiplikationstabell för ensiffriga sådana tal. Genomför den för $127 \cdot 43$. Varför fungerar den? Vilka räknelagar använder du för att se att algoritmen fungerar?
3. Vi har en algoritm för att subtrahera naturliga tal. Genomför den för $431 - 279$. Varför fungerar algoritmen?
4. Hur avgör man om två rationella tal är lika? Hur avgör man om det ena är större än det andra?

(a) Vilka av följande rationella tal är lika? Använd inte räknedosan!

$$\frac{84}{315}, \quad \frac{322}{238}, \quad \frac{260}{975}, \quad \frac{456}{1672}, \quad \frac{759}{561}, \quad \frac{153}{561}.$$

(b) Ordna följande rationella tal i storleksordning. Börja med det minsta.

$$\frac{212}{520}, \quad \frac{173}{425}, \quad \frac{131}{321}.$$

5. Beräkna

$$(a) \quad \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{7} + \frac{4}{3}\right) \quad (b) \quad \frac{\frac{4}{9} - \frac{3}{5}}{\frac{4}{3} + \frac{7}{5}} \quad (c) \quad \frac{35}{9}\left(\frac{6}{7} - \frac{3}{5}\right).$$

Svara på så enkel form som möjligt. (Känner du dig osäker på denna uppgift bör du gå tillbaka till dina tidigare läroböcker och repetera!)

6. Följande misstag i räkningar är inte ovanliga:

$$\frac{a+b}{a+c} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{ab}{a+c} = \frac{b}{c}$$

Vilka missuppfattningar ligger bakom dem? För vilka tal a , b och c stämmer de?

7. Priset på en vara stiger en vecka med 20% för att veckan efter sjunka med 7%. Hur många procent har varans pris stigit under de två veckorna? Vad händer om priset sjunker 7% under första veckan och sedan stiger 20% under den andra?
8. Skriv följande tal på decimalform (utan att använda räknedosa).

$$(a) \quad \frac{7}{9} \quad (b) \quad \frac{2}{13} \quad (c) \quad \frac{21}{5} \quad (d) \quad \frac{23}{11}.$$

9. Skriv följande tal som rationella bråk.
- 0,237
 - 0,237237237237... (periodiskt)
 - 0,237373737... (periodiskt)
 - 12,3464646... (periodiskt)
 - 34,1243243... (periodiskt)
10. Beräkna $0.777\ldots \cdot 0.428571428571\ldots$ exakt!
11. Avgör om det givna rationella talet är större eller mindre än $\sqrt{3}$. (En räknedosa kan vara till hjälp, men håll dig till heltal!)
- $\frac{313}{179}$
 - $\frac{151}{87}$
 - $\frac{71}{41}$
12. Bestäm de tre första decimalerna i decimalutvecklingen av $\sqrt{3}$. (Räknedosa kan vara till hjälp, men använd metoden i texten. Knappa inte in $\sqrt{3}$ direkt!)
13. Ange en decimalutveckling av ett reellt tal som garanterat inte är rationellt.
14. I texten hävdas det att det mellan två olika rationella tal alltid finns oändligt många andra rationella tal. Varför stämmer det?
15. Finns det alltid ett rationellt tal mellan två olika reella tal? Varför? Stämmer det också att det mellan två olika reella tal finns oändligt många olika rationella tal?
16. Beräkna $2^3 \cdot 2^5$, $2^5 \cdot 4^5$, $1000^{-\frac{1}{3}}$.
17. Hur många siffror har talet $2^{16} \cdot 5^{14}$ om man skriver ut det i vårt vanliga positionssystem?
18. Förenkla $\frac{2^5 \cdot 5^{10}}{25^4 \cdot 10^2}$.
19. Vad står timvisaren på 3729 timmar efter kl. tre? Hur många dagar har det då gått?
20. Vilken veckodag är det 412 dagar efter långfredagen? Hur många veckor har det då gått?
21. Beräkna sista siffran i
- 33^8
 - 417^{36}
 - $319^{12} \cdot 6^{10}$
22. Lös följande ekvationer:
- $\frac{7}{3}(5x + 2) = x - 10$
 - $(x - 3)(x + \frac{3}{4}) = x^2 + \frac{5}{7}$
 - $(x - \frac{3}{7})(2x - 7) = 2x^2$
23. Lös följande olikheter:
- $8x + 5 > 10x - 3$
 - $(x - 3)(x + \frac{3}{4}) < x^2 + \frac{5}{7}$
 - $\frac{8x-7}{3} > 15x + \frac{2}{3}$

24. Lös ekvationerna $x^2 + 2x + 1 = 4$, $x^2 + 2x = 8$, $x^2 + 6x = 7$.
25. Kalle tänker på ett tal. Han multiplicerar talet med 5 och lägger till 10. Sen multiplicerar han med 2. Talet han får då är 40. Vilket tal tänkte han på?

Svar och lösningar till några av övningarna

4. (a) Vi gör först en grov uppskattning av talen. Vi har

$$\frac{84}{315} \approx \frac{80}{320} = \frac{1}{4}, \quad \frac{322}{238} \approx \frac{320}{240} = \frac{4}{3}, \quad \frac{260}{975} \approx \frac{250}{1000} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{456}{1672} \approx \frac{400}{1600} = \frac{1}{4}, \quad \frac{759}{561} \approx \frac{800}{600} = \frac{4}{3}, \quad \frac{153}{561} \approx \frac{150}{600} = \frac{1}{4}.$$

För talen som är ungefär $\frac{1}{4}$ gör vi en noggrannare undersökning.

Eftersom $84 \cdot 975 = 81900 = 260 \cdot 315$ är $\frac{84}{315} = \frac{260}{975}$.

Eftersom $456 \cdot 561 = 255816 = 153 \cdot 1672$ är $\frac{456}{1672} = \frac{153}{561}$.

Eftersom $84 \cdot 1672 = 140448 < 143640 = 315 \cdot 456$ är $\frac{84}{315} < \frac{456}{1672}$.

Sammanfattningsvis gäller

$$\frac{84}{315} = \frac{260}{975} < \frac{456}{1672} = \frac{153}{561}.$$

Alternativ. Man kan också förkorta alla bråk så långt som möjligt.

Talen som är ungefär $\frac{4}{3}$ överlämnas till läsaren.

(b) Eftersom $173 \cdot 520 = 89960 < 90100 = 212 \cdot 425$ gäller $\frac{173}{425} < \frac{212}{520}$.

Eftersom $212 \cdot 321 = 68052 < 68120 = 131 \cdot 520$ gäller $\frac{212}{520} < \frac{131}{321}$.

Alltså

$$\frac{173}{425} < \frac{212}{520} < \frac{131}{321}.$$

5. (a) $-\frac{136}{63}$

(b) Vi har

$$\frac{4}{9} - \frac{3}{5} = \frac{4 \cdot 5}{9 \cdot 5} - \frac{3 \cdot 9}{9 \cdot 5} = \frac{20 - 27}{45} = -\frac{7}{45}$$

och

$$\frac{4}{3} + \frac{7}{5} = \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{7 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{20 + 21}{15} = \frac{41}{15}.$$

Detta ger

$$\frac{\frac{4}{9} - \frac{3}{5}}{\frac{4}{3} + \frac{7}{5}} = \frac{-\frac{7}{45}}{\frac{41}{15}} = -\frac{7 \cdot 15}{45 \cdot 41} = -\frac{7}{3 \cdot 41} = -\frac{7}{123}.$$

(c) 1

6. Den första är sann om $a = 0$ eller $b = c$. Den andra är sann om $b = 0$ eller om $ac = a + c$, m.a.o. om $c = \frac{a}{a-1}$.
7. Efter två veckor är priset i båda fallen $1.2 \cdot 0.93 = 1.116$ gånger det ursprungliga.
8. (a) $0,777777\dots$
(b) Vi har

$$\begin{array}{r}
 0, 1 5 3 8 4 6 \\
 \underline{13 2, 0} \\
 1 3 \\
 \underline{ 7 0} \\
 6 5 \\
 \underline{ 5 0} \\
 3 9 \\
 \underline{ 1 1 0} \\
 1 0 4 \\
 \underline{ 6 0} \\
 5 2 \\
 \underline{ 8 0} \\
 7 8 \\
 \underline{ 2}
 \end{array}$$

Nu gäller det att dividera 2 med 13, dvs samma problem som vi började med och "det hela" kommer att upprepas. Alltså är $\frac{2}{13} = 0,153846153846153846\dots$

- (c) 4,2 (d) 2,0909090909...
9. (a) $\frac{237}{1000}$ (b) $\frac{237}{999} = \frac{79}{333}$ (c) $\frac{235}{990} = \frac{47}{198}$
(e) Låt $r = 34,1243243243243\dots$. För att få perioden 243 att "komma direkt efter decimalkommat" multiplicerar vi med 10 och får $10r = 341,243243243243\dots$. Nu multiplicerar vi detta tal med 1000 (eftersom perioden är tre) och får

$$\begin{array}{rcl}
 10000r & = & 341243,243243243\dots \\
 10r & = & 341,243243243243\dots
 \end{array}$$

Detta ger $9990r = 10000r - 10r = 341243 - 341 = 340902$ och $r = \frac{340902}{9990}$. Vi kan förkorta och få $\frac{6313}{185}$.

10. $\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{3}$.

11. (a) Större (b) Större

(c) Eftersom $71^2 = 5041 < 5043 = 3 \cdot 41^2$ gäller $\left(\frac{71}{41}\right)^2 < 3$ och alltså $\frac{71}{41} < \sqrt{3}$.

12. 1.732 , ty $1.732^2 < 3 < 1.733^2$.

13. Ett decimaltal som *inte* är periodiskt är inte rationellt. Ett sådant exempel är t.ex. $0,10100100010000100000100\dots$. (Antalet nollor mellan två ettor ökar hela tiden med ett.)
14. Om talen är a och b så ligger $m_1 = \frac{1}{2}(a+b)$ mellan a och b (Varför?) och är ett rationellt tal (Varför?). Så vi ser att det finns ett rationellt tal som ligger mellan a och b . Nu kan vi upprepa detta. Låter vi $m_2 = \frac{1}{2}(a+m_1)$ så ligger m_2 också mellan a och b , det gör också $m_3 = \frac{1}{2}(a+m_2)$ osv.
15. (a) Ja. Först ger vi två exempel som kan förklara varför.
1. Om $a = 3,1234\,4998\dots$ och $b = 3,1234\,621\dots$ så ligger $3,12345$ mellan a och b . Vi letar alltså efter den första siffran där talen skiljer sig åt och väljer nästa decimal mellan dem i a och b .
2. Ett lite lurigare exempel är $A = 3,1234599953\dots$ och $B = 3,12346$. Då kan vi ta $3,123459998$ som ligger mellan A och B .
- Anmärkning.* Vi kan anta att decimalutvecklingen inte slutar med oändligt många nior. Allmänt, om $a \neq b$ så finns ett positivt heltal n så att $1/n < |a-b|$, så om vi markerar alla punkter på tallinjen som kan skrivas som ett rationellt tal med nämnare n , så kommer minst en av dessa punkter att hamna mellan a och b (punkterna ligger tätare än avståndet mellan a och b).
- (b) Ja!
16. 2^8 eller $8 \cdot 32 = 256$, 2^{15} eller $32 \cdot 1024 = 32768$, $1/10$.
17. Talet är $2^2 \cdot 10^{14} = 4 \cdot 10^{14}$; 15 siffror.
18. 8.
19. Vi räknar modulo 24. Eftersom $3729 = 155 \cdot 24 + 9$ gäller $3 + 3729 \equiv 3 + 9 = 12$ så visaren står på tolv och det har gått 155 dagar.
20. Torsdag. 58 veckor.
21. (a) 1.
(b) Modulo 10 gäller $417^{36} \equiv 7^{36} = (7^2)^{18} = 49^{18} \equiv (-1)^{18} = 1$ så sista siffran är 1.
(c) 6.
22. (a) $x = -\frac{11}{8}$ (b) $x = -\frac{83}{63}$ (c) $x = \frac{21}{55}$.
23. (a) $x < 4$ (b) $x > -\frac{83}{63}$ (c) $x < -\frac{9}{37}$.
24. $x = -1 \pm 2$, $x = -1 \pm 3$, $x = -3 \pm 4$.
25. 2.