

Mätning och geometri

I den här delen av kursen skall vi gå igenom begrepp som *längd*, *area* och *volym*. Vi skall också studera Euklidisk geometri och *bevisa* satser om och lära oss att *konstruera* geometriska figurer med föreskrivna egenskaper.

Ett viktigt syfte är att genom att lösa och diskutera geometriska problem få *erfarenheter* om hur en uppgift kan *tolkas* och *förstås*; vad det innebär att *bevisa* och *motbevisa* ett påstående.

1. Inledande problem

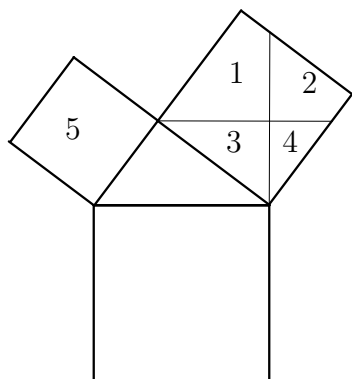
1. Fundera en stund på följande frågor.
 - (a) Vad tycker du att matematik är för något?
 - (b) Vad är ett problem? Vad är en lösning?
 - (c) Vad är ett bevis?
2.
 - (a) Vad säger Pythagoras' sats? Vad betyder den geometriskt? Hur formuleras den algebraiskt?
 - (b) Är satsen sann? Varför det?
3. Klipp ut fyra stycken exakt likadana rätvinkliga trianglar. Kan du med hjälp av dessa fyra trianglar "bevisa" Pythagoras' sats?

Om inte, får du följande ledning:

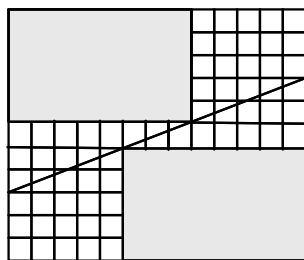
Kan du lägga trianglarna så att du får en ytterkontur som är en kvadrat och ett "hål" som också är en kvadrat? Rita i så fall upp denna kvadratiska ytterkontur.

Kan du nu i denna kvadratiska ytterkontur flytta om trianglarna så att du får två kvadratiska hål? I så fall är "beviset" nästan klart.

4. Betrakta figuren nedan. Figuren föreställer en rätvinklig triangel med tre stycken kvadrater som ansluter till triangelns tre sidor. Kan du, med hjälp av idén i figuren, bevisa Pythagoras' sats? Hur?



5. Betrakta figuren nedan.



Figuren innehåller två skuggade rektanglar och fyra oskuggade polygoner, två trianglar och två fyrhörningar.

- Kan du av dessa fyra polygoner lägga en kvadrat?
- Kan du av dessa fyra polygoner lägga en rektangel som inte är en kvadrat?
- Lyckades du? Betrakta i så fall arean av kvadraten respektive rektangeln. Blev du överraskad? Något stämmer inte? Hur förklarar du detta? Prata med kompisarna.

Det finns kopior på figurerna i slutet av stencilen som du kan klippa sönder och experimentera med.

Del I. Längd, area och volym

2. Längd

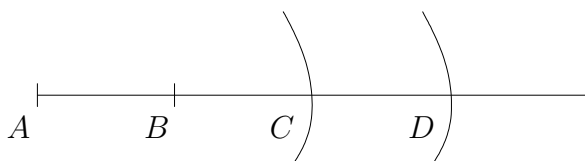
I många böcker tas det ofta för givet att man vet vad längd är och att man kan mäta längd med hjälp av de reella talen, men det är inte klart hur man skall bära sig åt för att konstruera en sträcka med längden t.ex. π .

2.1. Verkstad M1

Givet: En sträcka AB med längden 1.

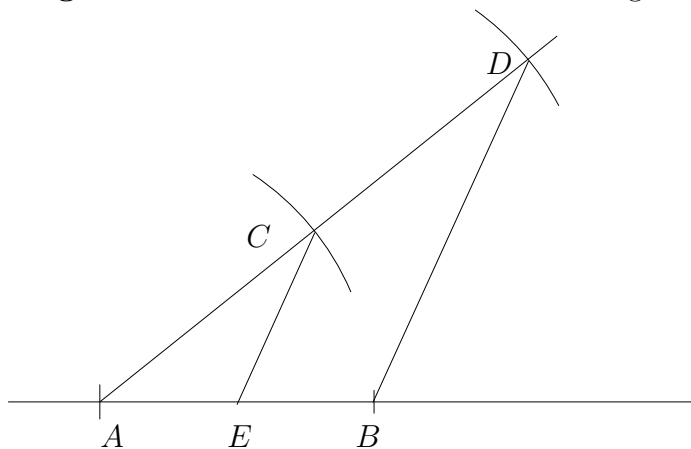
Mål: Konstruera (med passare och ogradrad linjal) en sträcka som har längden $\frac{m}{n}$ för godtyckliga positiva heltal m och n .

Steg 1. Konstruktion av en sträcka med längden 3.



Förläng sträckan AB förbi B till en stråle s . Avsätt längden AB i passaren. Drag en cirkel med denna längd och medelpunkt i B . Kalla den nya skärningspunkten med s för C . Upprepa detta genom att dra en cirkel med medelpunkten C och kalla skärningen med s för D . Då har sträckan AD längden 3. $\square$

Steg 2. Konstruktion av en sträcka med längden $\frac{1}{2}$.



Drag en stråle s genom A som inte är parallell med AB . Avsätt med hjälp av metoden i Steg 1 punkter C och D på strålen s så att sträckorna AC och AD har längden 1 respektive 2. Drag en linje genom C som är parallell med linjen BD . Den skär linjen AB i en punkt E som uppfyller att längden av AE är $\frac{1}{2}$. $\square$

Anmärkning 1. I lösningen använder vi att det går att konstruera en

linje genom C som är parallell med BD . Att det går följer av följande

Problem 1. *Givet en linje AB och en punkt C som inte ligger på AB . Konstruera en linje som går genom C och är parallell med AB .*

Anmärkning 2. I Steg 2 påstår vi att sträckan AE har längden $\frac{1}{2}$. Det följer av att trianglarna ACE och ADB är likformiga. Vi återkommer till detta i del II. $\square$

Med hjälp av idéerna i Steg 1 och 2 är det lätt(?) att se att det går att nå målet i Verkstad M1 och konstruera en sträcka med längden $\frac{m}{n}$.

Problem 2. *Konstruera en sträcka med längden $\frac{5}{3}$.*

3. Area

I det här avsnittet skall vi diskutera hur man kan beräkna arean av ett område och ange en metod för att beräkna arean av en godtycklig polygon och bestämma arean av en cirkel.

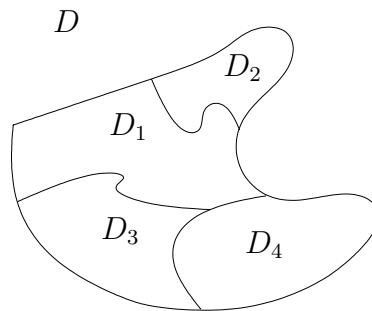
Börja gärna med att fundera över hur man kan bestämma arean av en polygon med heltalskoordinater i ett vanligt rätvinkligt koordinatsystem i planet med samma skala på båda axlarna.

Problem 3. *Vilka tal kan förekomma som areor av sådana polygoner? Några exempel på tal som ni kan fundera på om de kan förekomma är*

$$1 \quad 7 \quad 12 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad 5,7 \quad \sqrt{2} \quad \pi$$

När vi skall definiera arean utgår vi från följande grundläggande antaganden (axiom):

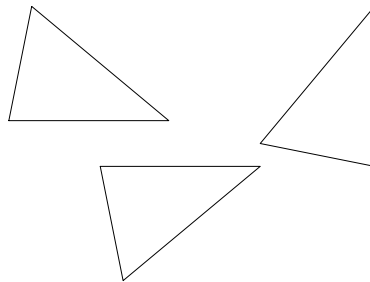
1. En kvadrat med sidlängden 1 har arean 1.
2. Kongruenta figurer har samma area.
3. Om ett område delas in i delar så är hela områdets area summan av delområdenas areor.



$$|D| = |D_1| + |D_2| + |D_3| + |D_4|$$

Anmärkning. Ordet kongruent kommer av ett latinskt ord som betyder sammanfalla. Att två figurer är kongruenta betyder att de har samma storlek och form. För polygoner betyder det att de har samma vinklar och att motsvarande sidor är lika långa. Två cirklar är kongruenta om de har lika lång radie.

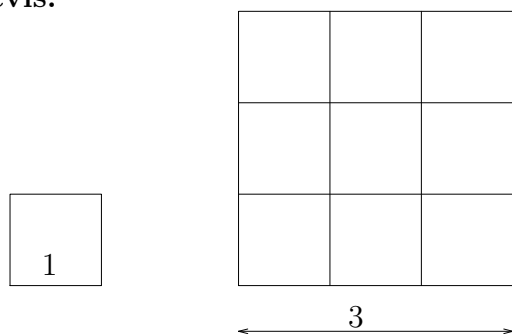
Här är tre kongruenta trianglar.



Vi kan nu härleda några resultat (Satser) om arean hos några geometriska figurer.

Sats 3.1. *En kvadrat med sidan n (n heltal) har arean n^2 .*

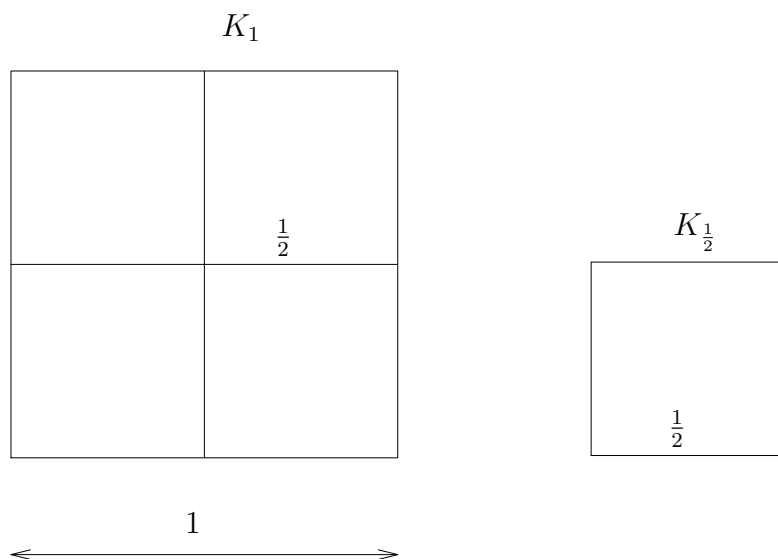
Bevis.



Dela in kvadraten i n^2 kvadrater med sidan 1 ($n = 3$ i figuren). De små kvadraterna har alla arean 1 så den stora kvadraten har arean n^2 . ■

Sats 3.2. En kvadrat med sidan $\frac{1}{n}$ har arean $\frac{1}{n^2}$.

Bevis.

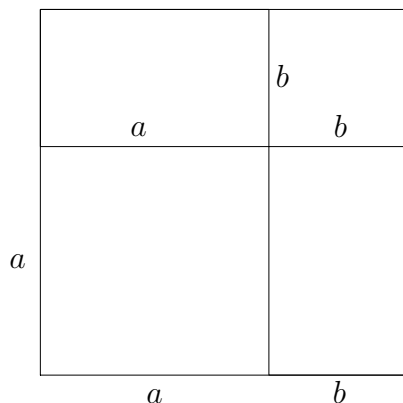


Dela in kvadraten K_1 med sidan 1 i n^2 kvadrater $K_{\frac{1}{n}}$ med sidan $\frac{1}{n}$. Då gäller $1 = |K_1| = n^2 \times |K_{\frac{1}{n}}|$ så $|K_{\frac{1}{n}}| = \frac{1}{n^2}$. ■

Genom att kombinera ideérna i bevisen av Sats 3.1 och 3.2 får vi att en kvadrat med sidan r där, $r = \frac{n}{m}$ är ett rationellt tal, har arean r^2 .

Sats 3.3. Arean av en rektangel med sidorna a och b har arean ab .

Bevis.



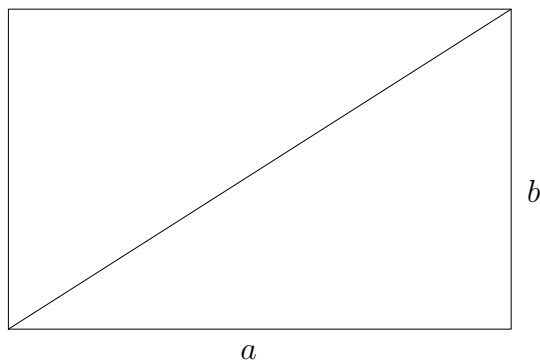
Betrakta en kvadrat K_{a+b} med sidlängden $a+b$. Den har arean $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Vi kan dela in den (se figuren) i en kvadrat K_a med sidan a och en kvadrat K_b med sidan b och två (kongruenta) rektanglar R_{ab} med sidorna a och b . Kvadraterna har areorna a^2 och b^2 . Därför gäller

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = |K_{a+b}| = |K_a| + |K_b| + 2|R_{ab}| = a^2 + b^2 + 2|R_{ab}|$$

vilket ger (räkna själv) $|R_{ab}| = ab$. ■

Sats 3.4. *En rätvinklig triangel med kateterna a och b har arean $\frac{1}{2}ab$.*

Bevis.



Rektangeln i figuren är indelad i två trianglar med kateterna a och b . Summan av deras areor är alltså lika med rektangelarean som är ab . Trianglarna har därför arean $\frac{1}{2}ab$. ■

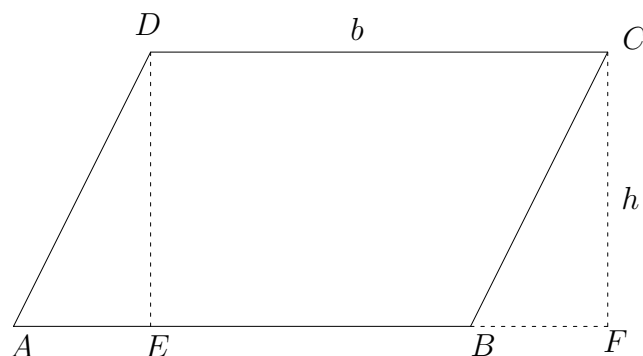
Problem 4. *Visa*

Sats 3.5. *En godtycklig triangel med basen b och höjden h har arean $\frac{1}{2}bh$.*

Ledning. Använd Sats 3.4. Tänk på att en triangel kan ha en trubbig vinkel.

Sats 3.6. *En parallelogram med basen b och höjden h har arean bh .*

Bevis.



Låt P vara parallelogrammen $ABCD$. Låt $|A|$ vara arean av fyrhörningen $AFCD$. Vi skall beräkna $|A|$ på två sätt.

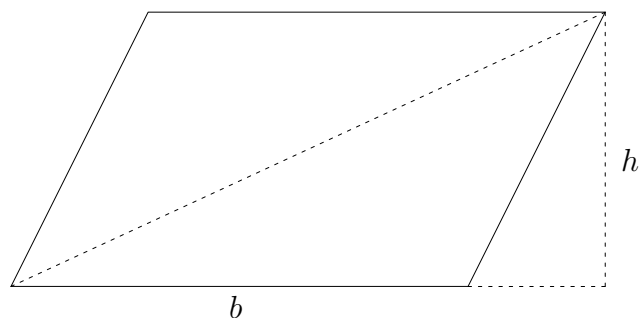
Först delar vi in fyrhörningen $AFCD$ i parallelogrammen P och triangeln BFC . Om $|T|$ är triangelns area så gäller $|A| = |P| + |T|$.

Ett annat sätt är att dela in fyrhörningen $AFCD$ i triangeln AED och rektangeln $EFCD$. Triangeln AED är kongruent med triangeln BFC och har därför arean $|T|$. Rektangeln $EFCD$ har sidorna b och h och alltså arean bh så $|A| = |T| + bh$.

Vi får $|P| + |T| = |T| + bh$ dvs. $|P| = bh$. ■

Problem 5. *I figuren i beviset kan man "klippa ut" triangeln AED och flytta den till läget BFC , ett mycket åskådligt bevis. Tyvärr är det inte alltid så enkelt. Kan du se varför?*

Anmärkning. I det här beviset har vi inte utnyttjat att vi kan triangelns area från Problem 4. Om man använder det behöver man bara observera att P kan delas in i två kongruenta trianglar som vardera har arean $\frac{1}{2}bh$.



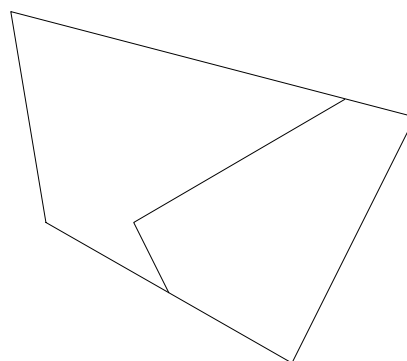
Eftersom en godtycklig polygon kan delas in i trianglar kan man med hjälp av Problem 4 räkna ut arean av en godtycklig polygon.

Problem 6.

1. Antag att vi har en kvadrat med sidlängden 5 och en med sidlängden 10. Hur många gånger större area har den större kvadraten jämfört med den mindre?
2. Vad blir svaret om vi har sidlängderna $\frac{1}{2}$ och 1 istället?
3. Sidlängderna 3 och 6?

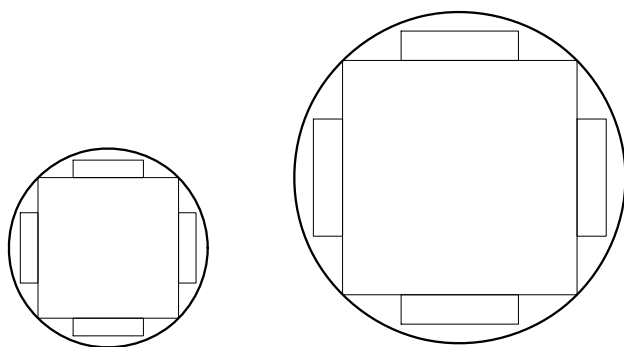
Problem 7.

Två bönder har tomter som gränsar till varandra utmed den brutna linjen i figuren till höger. De vill ändra gränsen så att den är en rät linje men utan att ändra areorna på tomterna. Kan du hjälpa dem med att göra det på ett enkelt sätt?



3.1. Arean av en cirkel.

Vi ger en mycket kort beskrivning av hur man kan gå till väga.



I figuren har vi två cirklar där den ena är (upp)skalad med en faktor r . Eftersom fyrhörningarnas sidor ändras med denna faktor ändras deras areor med faktorn r^2 . Cirklarnas areor är approximativt lika med summan

av fyrhörningarnas areor och ändras därför också med faktorn r^2 . Denna diskussion gäller också för mer allmänna områden än cirklar.

Vi *definierar* nu π som arean av en cirkel med radie 1 och får följande

Sats 3.7. *Arean av en cirkel med radien r är πr^2 .*

4. Längden av en kurva.

Att definiera längden av en kurva i planet är (ännu) svårare än att definiera area. Idén är att man delar in kurvan i flera delar och i varje del ersätter kurvan med en rät linje som i figuren.



När indelningen blir finare och finare närmar sig längden av polygontåget ett visst tal som kallas kurvans längd.

När vi skalar om kurvan med en faktor t så ändras längderna på de små linjestyckena alla med denna faktor t och därför gör också kurvans längd det.

4.1. Cirkelns längd

Sats 4.1. *En cirkel med radien r har omkretsen $2\pi r$.*

Bevis. Cirkeln med radien 1 har en viss längd. Vi kallar den tillfälligt för 2Π . Eftersom cirkeln med radie r fås från enhetscirkeln genom en skalning med faktorn r får vi från diskussionen ovan att dess omkrets är $2\Pi r$. För att bevisa satsen räcker det därför att visa att $\Pi = \pi$. För att motivera detta betraktar vi en regelbunden n -hörning som är inskriven i enhetscirkeln. När n är stort kan vi flytta om de små "tårtbitarna" till en figur som nästan är en rektangel. Arean av denna figur är samma som enhetscirkelns, dvs. π . "Höjden" i figuren är nästan 1 och basen är nästan halva omkretsen, dvs. Π . Figurens yta är alltså nästan $1 \cdot \Pi = \Pi$. Ju större n blir desto bättre blir approximationen och vi får $\Pi = \pi$. ■

Problem 8. *Beskriv några olika sätt att bestämma π approximativt, gärna både praktiskt (genom att mäta) och teoretiskt (genom att räkna). Genomför gärna era förslag. Vad fick ni för värden på π ?*

5. Volym

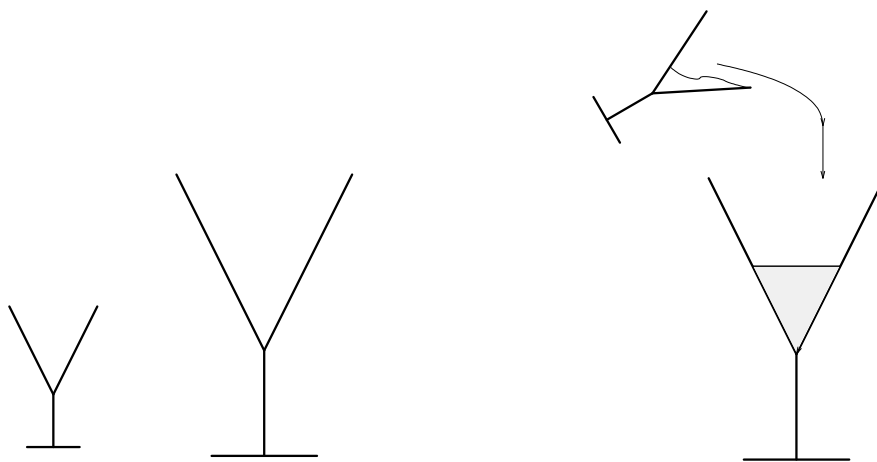
Teorin för volym är mycket lik teorin för area. Vi utgår från att volymen av en kub med sidan 1 är 1. Sedan visar man att volymen av en kub med sidan r är r^3 och att volymen av en vinkelrät låda (eller parallelepiped) med sidorna a , b och c är abc . Sedan kan man definiera volymen för godtyckliga kroppar genom att approximera dem med sådana lådor. Eftersom lådornas volym ändrar sig med en faktor r^3 då vi ändrar längdskalan med en faktor r gäller detsamma för godtyckliga kroppar.

Man kan visa att volymen av klotet med radien 1 är $\frac{4}{3}\pi$. Klotet med radien r har alltså volymen $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Anmärkning. Man kan visa att arean av klotet med radien 1 är 4π . Från detta följer det (hur då?) att klotet med radien r har arean $4\pi r^2$.

Problem 9. Av ett antal tärningar med sidlängden 1 vill vi bygga en tärning med sidlängden 2. Hur många små tärningar behöver vi?

Problem 10. Lars har en glasservis där alla glas har samma form. Snapsglasen rymmer fyra centiliter. Lars har glömt bort hur stora vinglasen är. För att ta reda på det håller han fulla snapsglas i vinglasets tills det blir fullt och kommer på så sätt fram till vinglasets volym.



Lars funderar på om man inte kan "räkna ut" volymen i stället för att mäta. Lars fru Eva är mattelärare och Lars ber henne om hjälp. Eva mäter höjden på glasen, finner att vinglasen är dubbelt så höga som snapsglasen och säger sen blixtnabbt hur stort vinglaset är. Vad svarade Eva och hur kunde hon så svara så snabbt?

Problem 11. *Hur högt är vinglaset fyllt när det är halvfullt?*

Problem 12. *En staty i koppar väger 80 kilo. Om vi förminskar statyn så höjden halveras, och alla proportioner bevaras, hur tung blir den då?*

Hur mycket högre blir statyn om den väger 120 kilo?

Del II. Plan geometri och geometriska konstruktioner.

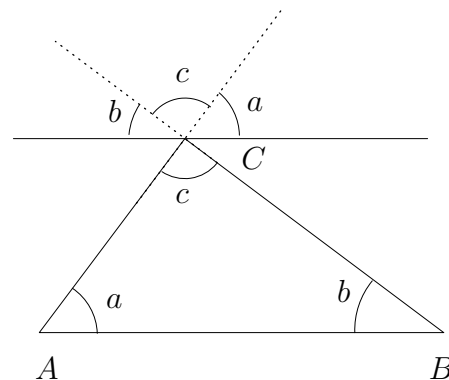
6. Euklidisk och sfärisk geometri

Den här delen handlar om plan eller Euklidisk geometri. Vi utgår från den intuitiva bilden som vi har skaffat oss om olika begrepp som punkter, rätta linjer, vinklar m.m. och skall ge några exempel på satser i Euklidisk geometri. Vi skall också träna oss på att göra olika geometriska konstruktioner.

Vi börjar med följande välkända sats.

Sats 6.1. *Vinkelsumman i en triangel är 180° .*

Betrakta triangeln ABC i figuren. Drag en linje genom C som är parallell med AB . Då är vinklarna markerade med a lika stora eftersom de är likbelägna vinklar vid parallella linjer. Av samma skäl är vinklarna markerade med b också lika. Vinklarna markerade med c är *vertikalvinklar* och också lika stora. Så triangelns vinkelsumma $a + b + c$ är lika med summan av vinklarna "ovanför" linjen genom C . Denna summa är ett halvt varv eller 180° .



I beviset står det *Drag en linje genom C som är parallell med AB .* Att det går följer av parallellaxiomet som säger att det finns exakt en linje genom C som är parallell med AB . Parallellaxiomet medför också att likbelägna vinklar vid parallella linjer är lika stora. Vi bevisar inte det utan betraktar det som "självklart". Att vertikalvinklar är lika stora följer genast av att de

har en gemensam sidovinkel (två vinklar är sidovinklar om de tillsammans bildar en *rak* vinkel, dvs. 180°).

I vår intuitiva uppfattning av plan geometri ingår att vi vet vad som menas med att något är ”platt”. Men vi lever ju på jordklotet som är ”runt”. Denna utgångspunkt leder till den sfäriska geometrin. I den sfäriska geometrin är den rätta linjen mellan två punkter en storcirkel. En storcirkel är en cirkel som delar sfären i två lika halvor. Ett exempel på en storcirkel är ekvatorn. En storcirkel är den kortaste vägen på sfärens yta mellan två punkter. I denna geometri är vinkelsumman i en triangel alltid större än 180° . Tänk till exempel på en triangel med ett hörn på nordpolen och två hörn på ekvatorn. För ”små” trianglar är vinkelsumman approximativt 180° . Så vi märker ingen skillnad ”till vardags” om vi använder Euklidisk geometri eller sfärisk geometri. I den sfäriska geometrin gäller inte parallellaxiomet, alla storcirkelar skär varandra så det finns inga parallella linjer.

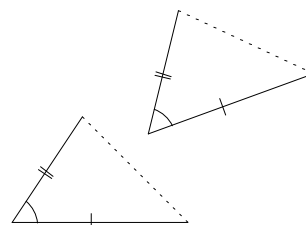
Vi kommer inte att gå igenom sfärisk geometri utan i fortsättningen är det Euklidisk geometri som gäller.

6.1. Kongruenta trianglar

Kom ihåg att två trianglar är kongruenta om sidorna är lika långa och vinklarna lika stora. Det finns tre olika kongruensfall för trianglar.

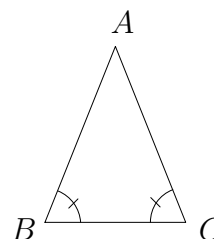
Sats 6.2. (Första kongruensfallet (s-v-s))

Om två sidor och mellanliggande vinkel är lika stora i två trianglar så är trianglarna kongruenta.



Följsats 6.3. (Basvinkelsatsen)

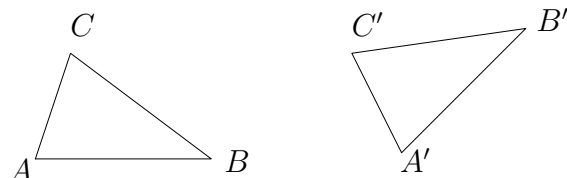
De två basvinklarna i en likbent triangel är lika stora.



Båda de här resultaten är intuitivt självklara. Det är lätt att se att man i Sats 6.2 kan lägga den ena triangeln på den andra så att de sammanfaller. Följsatsen kan man bevisa med hjälp av kongruenssatsen. Låt triangeln ACB (Observera ordningen!) vara triangeln ABC vänd upp och ned. Då är

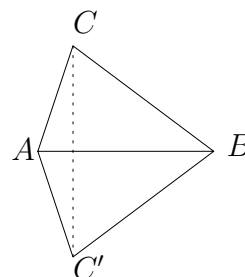
de två trianglarna kongruenta och alltså är vinklarna vid hörnen B och C lika.

Sats 6.4. (Andra kongruensfallet (s-s-s)) Om de tre sidorna är lika långa i två trianglar så är trianglarna kongruenta.



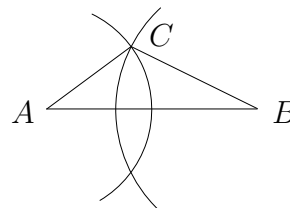
Bevis.

Flytta triangeln $A'B'C'$ som i figuren. Om vi använder basvinkelsatsen först på triangeln CAC' och sedan på triangeln CBC' ser vi att båda de små vinklarna vid hörnen C och C' är lika stora. Det gäller därför också för hela vinkeln. Enligt första kongruensfallet är därför trianglarna ABC och ABC' kongruenta.



Konstruktion av en triangel med sidorna 3, 4 och 6.

Drag först en sträcka AB med längden 6. Drag sedan en cirkel med centrum i A och radie 3. Drag också en cirkel med centrum i B och radie 4. Kalla den ena av dessa cirkels skärningspunkter för C . Då är den sökta triangeln ABC . Enligt andra kongruensfallet är alla trianglar med sidorna 3, 4 och 6 kongruenta så det finns bara en lösning, vilket väl också är "självklart".



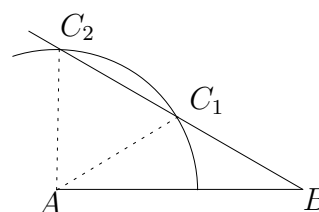
Sats 6.5. (Tredje kongruensfallet (v-s-v)) Om två vinklar och en sida är lika i två trianglar så är trianglarna kongruenta.

Beviset lämnas till den intresserade läsaren. På grund av att trianglarnas vinkelsumma är 180° så överensstämmer alla tre vinklarna i de två trianglarna. Vi kan alltså utgå ifrån att de två vinklarna ligger vid sidan.

Exempel.

Vi skall försöka konstruera en triangel ABC sådan att sidan AB har längden 7, sidan AC har längden 4 och vinkeln vid B är 30° .

Konstruktion. Låt sträckan AB ha längden 7. Dra sedan en stråle från B så att vinkeln blir 30° . Rita sedan en cirkel med centrum i A med radien 4. Vi ser att cirkeln skär strålen från B i två punkter C_1 och C_2 . Båda triangelarna ABC_1 och ABC_2 är en lösning på vårt konstruktionsproblem.



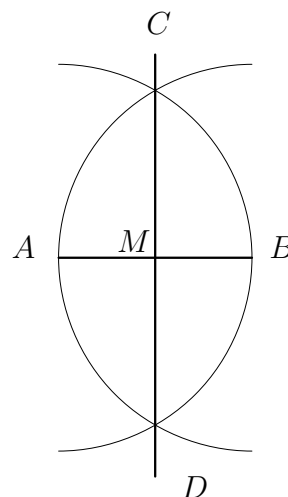
Detta exempel visar att det inte är tillräckligt att veta att två sidor och en vinkel som inte ligger mellan dessa sidor är lika i två trianglar för att triangelarna skall vara kongruenta; man kan få två olika fall.

6.2. Ytterligare några konstruktioner.

I konstruktionen ovan använde vi att man kan konstruera en vinkel på 30° . Vi skall nu beskriva några grundläggande konstruktioner med vars hjälp man kan konstruera en sådan vinkel.

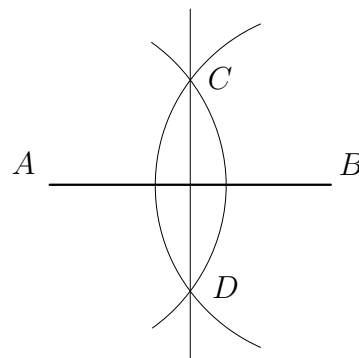
Konstruktion av mittpunktsnormal

Mittpunktsnormalen till en sträcka AB är den linje som går genom mittpunkten på och är vinkelrät mot sträckan AB . För att konstruera den drar man en cirkel med centrum i A som går genom B och sedan en cirkel med centrum i B som går genom A . Cirkelarna skär varandra i två punkter C och D . Linjen genom C och D är den sökta mittpunktsnormalen.



För att se att sträckan CD är mittpunktsnormal drar vi sträckorna AC , CB , BD och DA . Dessa sträckor bildar en romb. Enligt andra kongruensfallet (s-s-s) är triangelarna ACD och BCD kongruenta. Första kongruensfallet (s-v-s) ger sedan att triangelarna ACM och BCM är kongruenta. Därför är sidorna AM och BM lika långa och alltså är M mittpunkt på AB . Vinklarna vid M är lika stora och då deras summa är ett halvt varv är de räta.

Anmärkning. Cirklarnas radie behöver inte vara lika stor som längden av sträckan AB . Det går bra med vilken radie som helst som är större än halva denna sträcka.



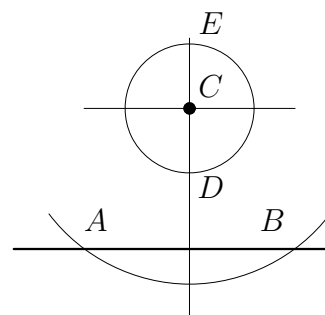
Problem 13. Visa att en punkt ligger på mittpunktsnormalen till AB om och endast om den har samma avstånd till A och B .

Problem 14. Visa att mittpunktsnormalerna till de tre sidorna i en triangel skär varandra i en punkt.

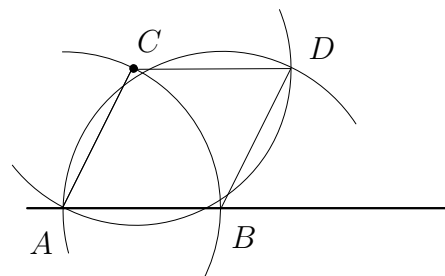
Lösning på Problem 1.

Uppgiften är att givet en linje och en punkt som inte ligger på denna linje konstruera en linje genom punkten som är parallell med den givna linjen. Vi skall gå igenom två lösningar.

Lösning 1. Idéen är att två gånger konstruera linjer som är vinkelräta mot varandra. Låt punkten vara C . Drag först en cirkel med medelpunkt i C som skär den givna linjen. Kalla skärningspunkterna A och B . Konstruera mittpunktsnormalen till sträckan AB . Den går genom C (Varför?). Drag sedan en ny cirkel med centrum i C och kalla skärningspunkterna med mittpunktsnormalen för D och E . Mittpunktsnormalen till sträckan DE är den sökta linjen.



Lösning 2. Låt A vara en godtycklig punkt på linjen. Idéen är att konstruera en romb som har AC som en sida och en annan sida AB där B är en annan punkt på den givna linjen. Drag en cirkel med centrum i A som går genom C . Kalla en av cirkelns skärningspunkter med den givna linjen för B . Drag sedan två cirklar med samma radie som nyss med



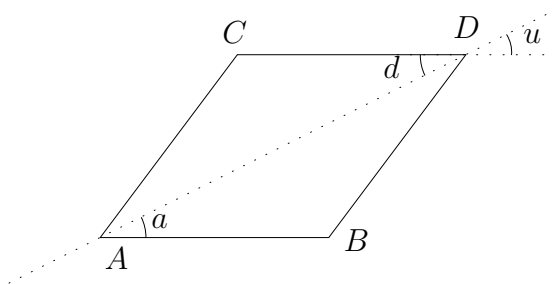
centrum i B och C . Kalla deras nya skärningspunkt för D . Då är fyrhörningen $ABCD$ en *romb*, dvs. dess fyra sidor är lika långa.

Att sträckan CD är parallell med AB följer av

Sats 6.6. *Sidorna i en romb är parallella.*

Bevis.

Låt romben vara $ABCD$ som i figuren. Drag diagonalen AD . Triangeln ABD och DCA är kongruenta (s-s-s) så vinklarna a och d är lika stora. Men d och u som är vertikalkvinklar är också lika stora. Det följer att vinklarna a och u som är likbelägna vinklar är lika stora. Linjerna AB och CD är därför parallella. Att AC och BD är parallella följer på samma sätt.

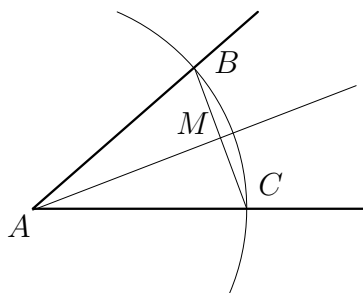


■

Konstruktion av bisektris

En bisektris är en linje som delar en vinkel mitt itu. Vi skall alltså givet en vinkel konstruera en vinkel som är hälften så stor som den givna vinkeln.

Låt den givna vinkeln ha sitt hörn i punkten A . Drag en cirkel med centrum i A . Den skär vinkelbenen i två punkter B och C . Konstruera mittpunkten M på sträckan BC och drag strålen AM . AM är bisektris till vinkeln eftersom triangeln ABM och ACM är kongruenta enligt andra kongruensfallet (s-s-s).



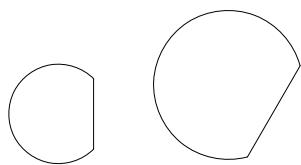
Nu har vi tillräckligt många verktyg för att konstruera en vinkel som är 30° . Vi konstruerar först en liksidig triangel. Det kan vi göra med samma metod som vi använde för att konstruera triangeln med sidorna 3, 4 och 6. Eftersom vinklarna i en liksidig triangel är lika stora är de 60° . Drar vi nu bisektrisen i en av dessa vinklar får vi en vinkel som är 30° .

Problem 15. Visa att en punkt i vinkelns fält ligger på bisektrisen om och endast om den har samma avstånd till vinkelbenen.

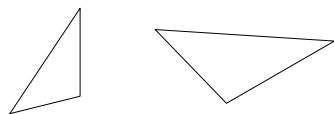
Problem 16. Visa att de tre bisektriserna i en triangel skär varandra i en punkt.

6.3. Likformiga trianglar

Två figurer är likformiga om de har samma form. Två likformiga figurer som är lika stora är kongruenta.



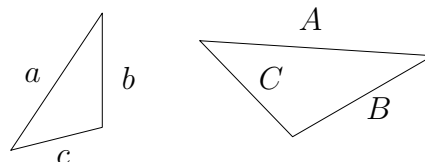
Detta betyder att två trianglar är likformiga om de har samma vinklar.



Följande sats accepterar vi utan bevis.

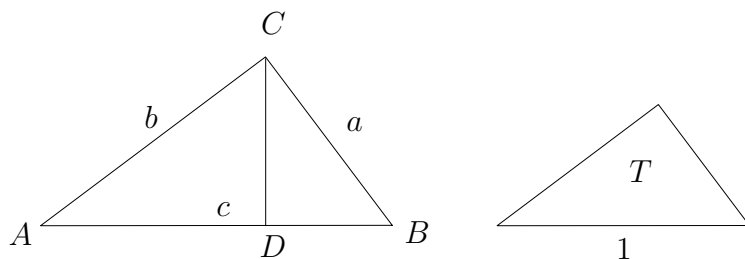
Sats 6.7.

Två likformiga trianglar har proportionella sidor.



Med figurens beteckningar betyder det att $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$. Om $r = \frac{A}{a}$ är skalfaktorn så gäller $A = ra$, $B = rb$ och $C = rc$. Om H och h är höjderna mot motsvarande sida, t.ex. mot A respektive a , så är $H = rh$. Om $|T|$ och $|t|$ är de två triangelarnas areor så gäller därför att $|T| = \frac{AH}{2} = \frac{(ra) \cdot (rh)}{2} = \frac{r^2 ah}{2} = r^2 |t|$.

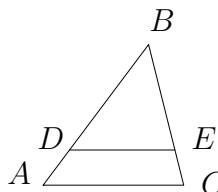
Bevis av Pythagoras' sats. Låt triangeln vara rätvinklig vid C . Drag höjden från punkten C . Den skär hypotenusan AB i en punkt D . Då är triangelarna ABC , ACD och CBD likformiga (Motivering?). Låt T vara en annan triangel som också är likformig med dessa trianglar, vars hypotenusas har längden 1 och vars area är $|T|$.



Triangelarna ABC , ACD och CBD har hypotenusorna c , b respektive a så de är omskalningar av triangeln T med dessa tal. Så triangeln ABC har arean $c^2|T|$, triangeln ACD har arean $b^2|T|$ och triangeln CBD har arean $a^2|T|$. Men arean av hela triangeln ABC är summan av deltriangelarnas areor så $c^2|T| = a^2|T| + b^2|T|$ och efter division med $|T|$ får vi $a^2 + b^2 = c^2$. ■

Sats 6.8. (Topptriangelsatsen)

En linje i en triangel som är parallell med basen skär av en triangel som är likformig med hela triangeln.



I figuren är alltså triangelarna ABC och DBE likformiga.

Bevis. Eftersom vinklarna BDE och BAC är likbelägna vid parallella linjer är de lika, så vinklarna i triangelarna BDE och BAC överensstämmer. ■

Vi kan nu bevisa påståendet i Anmärkning 2 på sidan 4. Eftersom BD och EC är parallella ger topptriangelsatsen att triangelarna AEC och ABD är likformiga. Skalfaktorn är $r = |AD|/|AC| = 2$. Så $|AB| = 2|AE|$ vilket betyder att AE är hälften så lång som AB . ($|AD|$ är längden av sträckan AD .)

6.4. Ekvivalensrelationer

Både kongruens och likformighet är exempel på *ekvivalensrelationer*, dvs. de uppfyller *reflexivitet*, *symmetri* och *transitivitet*, vilket betyder:

Reflexivitet: Varje triangel är kongruent med sig själv.

Symmetri: Om triangel $T1$ är kongruent med triangel $T2$ så är $T2$ kongruent med $T1$.

Transitivitet: Om $T1$ är kongruent med $T2$ och $T2$ är kongruent med $T3$ så är $T1$ kongruent med $T3$.

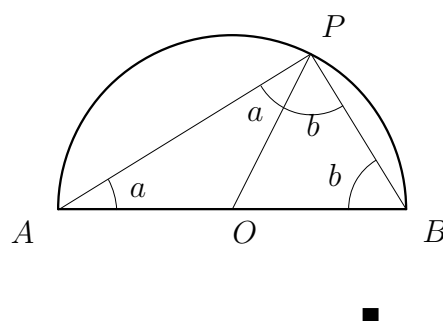
Detsamma gäller med "kongruent" överallt utbytt mot "likformig".
Tänk igenom att du är med på detta!

6.5. Något om cirklar

Sats 6.9. *Periferivinkeln i en halvcirkel är rät.*

Bevis.

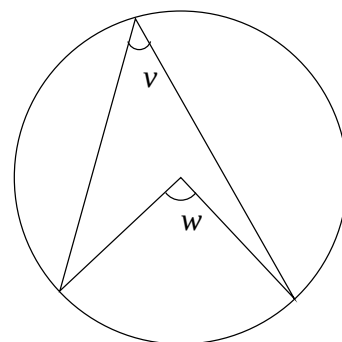
Vi skall visa att vinkeln vid P i triangeln APB är rät. Sträckorna OA , OB och OP är alla radier i cirkeln och därför lika långa. Så triangelna AOP och BOP är likbenta. Basvinkelsatsen ger att vinklarna markerade med a respektive b är lika stora. Vinkelsumman i triangeln APB är $a + a + b + b$ så $2(a + b) = 180^\circ$ som ger $a + b = 90^\circ$.



Problem 17.

Bevisa att medelpunktsvinkeln på en båge i en cirkel är dubbelt så stor som periferivinkeln på samma båge.

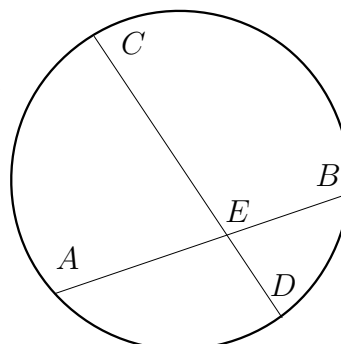
I figuren gäller alltså att $w = 2v$.



Följsats 6.10. *Periferivinklarna på en given båge är lika stora.*

Problem 18.

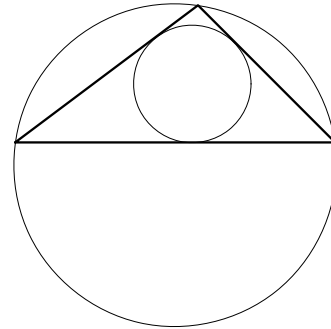
Bevisa kordasatsen: Om två kordor AB och CD i en cirkel skär varandra i en punkt E så gäller att $|AE| \cdot |EB| = |CE| \cdot |ED|$



Problem 19. *Konstruera medelpunkten till en given cirkel.*

Problem 20.

*Konstruera den till en given triangel
(a) omskrivna (b) inskrivna cirkeln.*



(Tänk på Problem 13–16 !)

