MATEMATIK
Göteborgs universitet

Tentamensskrivning i
MAL 200/220, del 3/1, 5p
2000-03-06, kl 8.45 - 13.45
Hjälpmedel: valfri miniräknare
Telefonvakt: Anders Öhgren, tel. 0740–479626

1. "Arkimedes princip" säger att om a och b är godtyckliga positiva reella tal så existerar ett naturligt tal n sådant att $nb > a$. Formulera Arkimedes princip med hjälp av kvantorerna "$\forall$" och "$\exists$" (Du kan beteckna med $\mathbb{N}$ de naturliga talen och med $\mathbb{R}_+$ de reella positiva). Formulera också negationen till "Arkimedes princip".

2. Låt A, B och C beteckna tre mängder. Rita Venn–diagram som svarar mot vänster– och högerled i likheten:

$$(C \setminus A) \cap (C \setminus B) = C \setminus (A \cup B).$$

Stämmer likheten? Bevisa Ditt påstående! Använd definitionerna av "$\cup, \cap$" och "$\setminus$". Vilka logiska lagar (tautologier) har Du använt?

3. Låt $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, där $\mathbb{Z}$ betecknar heltalen. Besvara följande frågor:

(a) Är funktionen $f(n) = n^2$ injektiv?

(b) Är funktionen $f(n) = n^3$ injektiv?

(c) Är funktionen $f(n) = (-1)^n n$ bijektiv?

Motivera noga Dina svar med hjälp av lämpliga definitioner!

4. (a) Vad menas med en uppräknelig mängd?

(b) Talen $a + bi$, där a och b är heltal och $i^2 = -1$, kallas Gaussiska heltal (t ex $1 + i, 1 + 2i, -1 + 3i$ osv). Visa att de Gaussiska heltalen bildar en uppräknelig mängd. Du kan börja med fallet då $a > 0$ och $b > 0$, men det är inte nödvändigt.

5. Bevisa med hjälp av matematisk induktion likheten

$$1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 11 + \cdots + n(3n + 2) = \frac{n(n+1)(2n+3)}{2}$$

då $n = 1, 2, 3, \ldots$.

6. Visa att varje produkt av tre efterföljande jämna heltal (som t.ex. 4,6,8 eller 10,12,14) är delbar med 48.

7. Bestäm alla möjliga rationella tal $\frac{x}{5}$ och $\frac{y}{7}$ (x, y heltal) sådana att

$$\frac{x}{5} - \frac{y}{7} = \frac{1}{35}.$$

8. (a) Låt z_1 och z_2 vara komplexa tal. Visa att $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

(b) Bestäm alla komplexa tal z sådana att $|z - 1| = |z - 3|$ och tolka geomtriskt deras läge i komplexa talplanet.

Varje uppgift ger maximalt 3p. För godkänd skrivning krävs minst 10p. För väl godkänd krävs minst 20p.
Skrivningarna kan hämtas på mottagningsrummet varje vardag mellan 12.30 och 13.00 från och med den 21 mars. Upplysningar om tentamensresultaten lämnas också per telefon fr o m den 21 mars: tel. 772 3509 efter kl. 14.00.