MATEMATIK
Göteborgs universitet

Tentamensskrivning i
MAL 200, del 3, 5p
1999-03-27, kl 8.45 - 13.45
Hjälpmedel: valfri miniräknare
Telefonvakt: Serge de Gosson, tel. 0740–479626

1. (a) Låt $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5\}$ och $C = \{1, 2, 6\}$. Bestäm mängderna $A \setminus (B \setminus C)$ och $(A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

   (b) Är det alltid sant att mängderna $A \setminus (B \setminus C)$ och $(A \setminus B) \cup (A \cap C)$ är lika? Bevisa Ditt påstående med hjälp av definitionerna av mängdoperationerna. Använd de logiska konnektiven.

2. Är utsagan $\forall\ a \in \mathbb{R}\ \exists\ b \in \mathbb{R}\ \ a = b^2$ sann? Motivera Ditt svar. Vad händer då man kastar om kvantorernas ordning i denna utsaga? Får man en sann utsaga då?

   (b) Formulera negationen till den första utsagan i (a)!

3. Ge exempel på ett motsägelsebevis ("reductio ad absurdum") – formulera en sats och ge dess bevis.

4. Låt $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ och $B = \{6, 12, 18, 24, 30, \ldots\}$.

   (a) Betrakta funktionen $f : A \to B$, där $f(n) = 6n$ (dvs 2 avbildas på 12, 4 på 24, 6 på 36 osv). Är denna funktion bijektiv?

   (b) Definiera en annan funktion $g : A \to B$ som är bijektiv.

   (c) Har mängderna A och B samma kardinalitet? Är de uppräkneliga?

5. Bevisa med hjälp av matematisk induktion att

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$$

6. (a) Uppdela följande tal i produkt av primtal: 6, 21, 105 och därefter 12, 54, 72. De första tre talen kallas *kvadratfria*, de sista tre är inte kvadratfria. Försök ge en egen definition av begreppet *kvadratfritt* naturligt tal.

   (b) Bestäm naturliga tal x och y sådana att $x^2y = 5880$ och y är kvadratfritt.

   (c) Är det alltid möjligt att skriva ett naturligt tal som produkt av en kvadrat och ett kvadratfritt tal? Motivera Ditt svar genom att t ex hänvisa till aritmetikens huvudsats.

7. Bestäm alla positiva heltaliga lösningar (x, y) till ekvationen $2x - 5y = 1$ sådana att både x och y är primtal mindre än 100.

8. Beräkna

$$\left(\frac{3 + 7i}{5 + 2i}\right)^{20} + \left(\frac{3 - 7i}{5 - 2i}\right)^{20}$$

   och skriv Ditt svar på formen $a + bi$.

Varje uppgift ger maximalt 3p. För godkänd skrivning krävs minst 10p. För väl godkänd krävs minst 20p.
Skrivningarna kan hämtas på mottagningsrummet varje vardag mellan 12.30 och 13.00 från och med den 9 april.