Explorativ övning 3

INDUKTION OCH DEDUKTION*

Syftet med övningen är att öka Din problemlösningsförmåga och bekanta Dig med olika bevismetoder. Vårt syfte är också att öva skriftlig framställning av matematisk argumentering. Det är viktigt att Du först läser stencilen om "Induktion och deduktion". Övningen består av ett antal problem som ibland formuleras som påståenden, och ibland, som "forskningsuppgifter" då Du själv skall ställa upp en förmodan och därefter ge ett bevis. Man måste vara medveten om att det inte finns några färdiga recept på hur man löser matematiska problem. Problemlösningsförmågan och förmågan att klart och tydligt formulera matematiska argument kräver mycket övning. Men det är alltid mycket viktigt att besvara frågan "Vad skall jag göra?" och därefter pröva olika metoder. Det är också viktigt att förstå att matematiska problem för det mesta inte ger upp med en gång. Ofta måste man tänka en längre tid för att komma på en lösning. Slutligen måste man tänka på att lösningen borde formuleras klart och tydligt för att underlätta för läsaren att följa Dina tankar. Vi följer stencilen "Induktion och deduktion".

Övning A

1. Bevisa att $x^2 = 4$ då och endast då $x = -2$ eller $x = 2$.
2. Bevisa att för godtyckliga reella tal x, y gäller ekvivalensen

$$x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y \quad \text{eller} \quad x = -y.$$

3. Bevisa att $x^2 > 4$ om och endast om $x > 2$ eller $x < -2$.
4. Bevisa att

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{y}\right) = 1$$

då och endast då $x + y = 1$.

*MAL200/220, ht 01

Försök lösa uppgifterna på egen hand. På slutet av denna stencil finns några exempel som Du kan använda som ledningar.

Övning B

Låt n beteckna ett heltal.

1. Visa att n^3 är ett udda heltal då och endast då n är udda (härma beviset i stencilen "Induktion och deduktion").
2. Visa att om n är ett udda heltal så är n^2+1 ett jämnt heltal. Formulera omvändningen[†] av den implikationen. Är omvändningen sann? Bevisa!
3. Visa att om n lämnar resten 1 vid division med 3 (dvs $n = 3k+1$ för ett heltal k), så är talet n^2+2 delbart med 3. Formulera omvändningen av den implikationen! Är omvändningen sann? Bevisa!

Övning C

1. Visa att $n^2 + (n+1)^2$ är ett udda heltal.
2. Visa att produkten av tre efterföljande heltal alltid är delbar med 6.

   Ledning. Tre efterföljande tal kan betecknas med $n-1$, n och $n+1$.

3* Visa att produkten av fem efterföljande heltal alltid är delbar med 30.

4. Låt $p > 3$ vara ett primtal[‡]. Visa att $p^2 - 1$ alltid är delbart med 24.

Övning D

1. Låt x vara ett reellt positivt tal. Visa att

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

   När får man likhet?

2. Låt nu a och b vara två positiva reella tal. Visa att

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

   Kan Du se ett samband med förra uppgiften? Kan Du utnyttja sambandet?

[†] Omvändningen av $A \Rightarrow B$ är $B \Rightarrow A$

[‡] Med ett primtal menas ett positivt heltal med exakt två olika delare. Alla primtal mindre än 20 är 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Om två olika primtal p_1 och p_2 delar ett tal n så är n delbart med deras produkt p_1p_2. Läs om primtal i "Matematik med mening" på sid. 32.

3. Låt a och b beteckna två icke–negativa reella tal. Bevisa olikheten:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

och motivera att likheten gäller precis då $a = b$.

Tolka olikheten geometriskt genom att rita en rätvinklig triangel vars höjd h från den räta vinkeln delar hypotenusan i två delar som betecknas med a och b. Det finns en geometrisk sats som säger att $h^2 = ab$.

Anmärkning. Talet $A(a,b) = \frac{a+b}{2}$ kallas **aritmetiska medelvärdet** av a och b, och talet $G(a,b) = \sqrt{ab}$ kallas **geometriska medelvärdet** av dessa tal. Olikheten säger således att det aritmetiska medelvärdet aldrig är mindre än det geometriska. Man definierar också **harmoniska medelvärdet**:

$$H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

4. Genom att välja olika värden på a och b undersök sambandet mellan $A(a,b)$, $G(a,b)$ och $H(a,b)$. Formulera en förmodan (hypotes) och ge ett bevis.

Övning E

1. Visa att talen $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$ och $z = m^2 + n^2$, där m, n är godtyckliga heltal satisfierar ekvationen:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Ge några exempel på triplar (x, y, z) som löser ekvationen.

Anmärkning. Ekvationen ovan kallas ofta för Pythagoras ekvation. De heltaliga lösningarna till denna ekvation studerades i Babylonien för mer än 5000 år sedan. Pythagoras och hans elever kunde åtminstone delvis formlerna ovan. Därmed visste de att ekvationen har oändligt många lösningar. Detta innebär att det finns oändligt många rätvinkliga trianglar med heltaliga sidlängder. Sådana trianglar brukar kallas för Pythagoreiska. (Läs om Pythagoras i ”Matematik med mening” på sid. 17).

2. Låt x, y, z beteckna en heltalig lösning till ekvationen

$$x^2 + y^2 = z^2$$

(t ex $5^2 + 12^2 = 13^2$). Bevisa att minst ett av talen x, y, z är delbart med 3.

Ledning. Ett heltal som inte är delbart med 3 kan alltid skrivas på formen $3k \pm 1$ (vart tredje tal i den heltaliga raden är delbart med 3 dvs den har formen $3k$, och varje tal som är ett mindre eller ett större är inte delbart med 3).

Övning F

1. Visa att för alla reella tal a och b gäller $a^2 + 2ab + 3b^2 \geq 0$.
2. Visa att för alla reella tal a, b och c gäller $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$.
3. Visa att om $0 < x < 1$ så är $0 < x^2 < x < 1$.
4. Är det sant att för godtyckliga reella tal gäller ekvivalensen $x^2 > y^2 \Leftrightarrow x > y$? Försök formulera lämpliga förutsättningar om x och y som garanterar att ekvivalensen gäller. Bevisa Ditt påstående.

Övning G

1. Studera talen $n^2 + 3n + 2$ för olika naturliga tal n (säg, $n = 1, 2, 3, 4, 5$). Är dessa tal primtal eller sammansatta tal? Formulera en förmodan och bevisa den.
2. Studera talen $n^4 + 4$ då n är ett naturligt tal. Är dessa tal sammansatta eller primtal? (det är möjligt att Du behöver en miniräknare). Visa Din förmodan.
3. Nu studera talen $n^2 + 1$ för olika naturliga tal n. Vad tror Du om förekomsten av primtal och sammansatta då $n = 1, 2, 3, \ldots$? Formulera en förmodan angående dessa två taltyper. Bevisa så mycket Du kan! (Det kan vara hopplöst att försöka bevisa Din förmodan i detta fall – Du får svar under undervisningens gång).

Övning H

1. Låt $n > 0$ beteckna ett naturligt tal. Jämför talen

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \text{och} \quad \frac{1}{n^2}$$

   för olika värden på n. Ställ upp en förmodan! Bevisa Ditt påstående!

2. Studera produkterna

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

   för olika värden på n. Formulera en förmodan och bevisa Din gisning.

Övning I

1. Undersök vilka belopp som kan betalas med tvåkronors– och femkronorsmynt (t ex i Danmark finns det sådana). Formulera en förmodan och ge ett bevis.

2. Bevisa att talet 7 inte kan skrivas som summa av två heltaliga kvadrater. Ge några exempel på andra tal, som liksom 7, inte är summor av två heltaliga kvadrater. Ge också några exempel på tal som kan skrivas som sådana summor.

3. Bevisa att talet 7 inte kan skrivas som summa av tre, men att det kan skrivas som summa av fyra heltaliga kvadrater.

   Anmärkning. Frågan om vilka naturliga tal n kan skrivas som summor av två, tre och fyra kvadrater studeras av flera berömda matematiker bl a Pierre de Fermat, Leonhard Euler och Carl Friedrich Gauss (läs om Euler i ”Matte med mening” på sid. 49, och om Gauss på sid. 37).

Övning J

1. Bevisa att talet $\sqrt{5}$ är irrationellt.

   Ledning: Härma beviset att $\sqrt{2}$ inte är rationellt i stencilen “Induktion och deduktion”.

2. Försök generalisera påståendet ovan genom att ersätta 5 med andra heltal eller kvadratroten med andra rötter.

Ledning till Övning A: (a) Vi visar att $x^2 = 25$ då och endast då $x = 5$ eller $x = -5$. Bevis:

$$x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 5 = 0 \text{ eller } x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ eller } x = -5.$$

Vi utnyttjar “konjugatregeln” ($a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$) och den egenskap hos de reella talen som säger att en produkt av två tal är lika med 0 då och endast då minst en av faktorerna är lika med 0.

I (b) kan Du resonera på samma sätt (eventuellt tänka på y som om det vore 5). I (c) är skillnaden den att i stället för “ $=$ ” har vi en olikhet “ $<$ ”. Man börjar med

$$x^2 > 25 \Leftrightarrow x^2 - 25 > 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+5) > 0.$$

Nu måste man besvara frågan när $(x-5)(x+5) > 0$. Detta händer precis då bägge faktorerna är positiva eller bägge är negativa. Försök gå vidare!

Följande övningar i Vretblads bok rekommenderas:

Vretblad: 1.5, 1.6 (106), 1.7 (107), 1.46 (136), 1.48 (139).