**Lösningar till tentamensskrivningen i MAL 200 del 4, 20000417**

1. **Ge exempel på**
   **(a) en relation som är transitiv, men inte symmetrisk,**
   **(b) ett reellt tal som inte är rationellt,**
   **(c) en ring som inte är en kropp.**
   **Motivera dina svar!**

   (a) Betrakta relationen $x < y$ på de reella tal. Den är transitiv: $x < y$ och $y < z$ medför att $x < z$, men inte symmetrisk: t ex $0 < 1$ men $1 \not< 0$.
   (b) T ex $\sqrt{2}$ är ett reellt tal som inte är rationellt. Om $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, där $p$ och $q$ är heltal, så är $2q^2 = p^2$, vilket visar att det finns ett udda antal primfaktorer 2 till vänster och ett jämnt antal sådana faktorer till höger. Detta strider mot aritmetikens fundamentalsats.
   (c) Heltalen $\mathbb{Z}$ är ett exempel på en ring som inte är en kropp. I en kropp har varje nollskilt element en invers, men talet 2 saknar invers i $\mathbb{Z}$ d v s ekvationen $2x = 1$ saknar heltaliga lösningar.

2. **Faktoruppdela polynomet $X^4 - 7X^2 - 8$ i produkt av irreducibla polynom med koefficienter i $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$ (d v s i $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ och $\mathbb{C}[X]$).**

   Låt $X^2 = Y$. Då är $X^4 - 7X^2 - 8 = Y^2 - 7Y - 8 = (Y+1)(Y-8) = (X^2+1)(X^2-8)$. Polynomen $X^2+1$ och $X^2-8$ är irreducibla i $\mathbb{Q}[X]$ eftersom de saknar rationella nollställen, så $(X^2+1)(X^2-8)$ är faktoruppdelningen i $\mathbb{Q}[X]$. Polynomet $X^2+1$ saknar reella nollställen och är därmed irreducibelt i $\mathbb{R}[X]$, medan $(X^2-8) = (X+2\sqrt{2})(X-2\sqrt{2})$; detta ger faktoruppdelningen $(X^2+1)(X+2\sqrt{2})(X-2\sqrt{2})$. Slutligen kan man i $\mathbb{C}[X]$ skriva polynomet som produkt av linjärfaktorer: $X^4-7X^2-8 = (X+i)(X-i)(X+2\sqrt{2})(X-2\sqrt{2})$.

3. **(a) På hur många olika sätt kan man placera 12 personer vid ett runt bord om man bara bryr sig om vilka en given person har till vänster resp. höger om sig, och inte vem som sitter på vilken stol?**
   **(b) På hur många sätt kan detta göras om två av personerna, kalla dem P och Q, inte får sitta bredvid varandra?**

   (a) Vi kan sätta den första personen på en godtycklig stol. Sen finns det 11 stolar kvar, där man ska placera 11 personer. Detta kan göras på $11!$ sätt.
   (b) Vi beräknar antalet icke tillåtna placeringar. Vi sätter $P$ på första stolen och $Q$ till höger eller vänster om honom. Då finns det 10 stolar kvar. Så det finns $2 \cdot 10!$ placeringar där $P$ och $Q$ sitter bredvid varandra. Därför finns det $11! - 2 \cdot 10! = 9 \cdot 10!$ placeringar där de inte sitter bredvid varandra.

4. **Formulera och bevisa Pythagoras' sats.**

   Se kompendiet om Euklidisk geometri och övningarna.

**5. Visa att vinkelsumman i en godtycklig fyrhörning ar $360^\circ$.**

Låt $ABCD$ vara fyrhörningen. Dra diagonalen $AC$. Om diagonalen ligger innanför fyrhörningen är vinkelsumman summan av vinkelsummorna till trianglarna $ABC$ och $ACD$. Om $AC$ ligger utanför fyrhörningen, får vi anta att $D$ ligger innanför triangeln $ABC$. Då är summan av vinkeln $\angle D$ i $ABCD$ och $\angle ADC$ i triangeln $ADC$ lika med $360^\circ$. Vidare är $\angle DAB = \angle CAB - \angle CAD$ och $\angle DCB = \angle ACB - \angle ACD$. Så $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = \angle CAB - \angle CAD + \angle B + \angle ACB - \angle ACD + 360^\circ - \angle ADC = (\angle CAB + \angle ABC + \angle ACB) - (\angle CAD + \angle ACD + \angle ADC) + 360^\circ = 180^\circ - 180^\circ + 360^\circ = 360^\circ$.

**6. Definiera operationen "$*$" på mängden $\mathbb{Z}$ av heltalen genom**

$$m * n = m^n$$

**då $m, n \in \mathbb{Z}$. Beräkna $2 * 5$, $2 * (-2)$ och $2 * 0$. Är denna operation kommutativ? Associativ? Finns det ett neutralt element?**

Vi har $2 * 5 = 2^5 = 32$, $2 * (-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ och $2 * 0 = 2^0 = 1$. Att $2 * (-2) = \frac{1}{4}$ visar att $*$ inte är en operation på $\mathbb{Z}$, så uppgiften är inte helt korrekt. Operationen är väldefinierad på de naturliga talen $\mathbb{N}$. Operationen är inte kommutativ: $0 * 2 = 0^2 = 0$, men $2 * 0 = 1$, inte heller assiociativ: $k * (m * n) = k^{m^n}$, medan $(k * m) * n = (k^m)^n = k^{mn}$; ett konkret exempel är $(2 * 1) * 2 = 2 * 2 = 4$, medan $2 * (1 * 2) = 2 * 1 = 2$. Om $e$ är ett neutralt element, så gäller $n * e = n^e = n$ för alla $n$, så $e = 1$. Men då är $e * n = 1^n = 1 \neq n$, om $n > 1$. Så ett neutralt element finns inte.

**7. Vilken rest ger $2^{2000}$ vid division med**
**(a) 31** **(b) 11** **(c) 341 ?**

Observera att $2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31}$, $2^5 = 32 \equiv -1 \pmod{11}$ och att $341 = 11 \cdot 31$. Då gäller $2^{2000} = (2^5)^{400} \equiv 1^{400} = 1 \pmod{31}$ och $2^{2000} = (2^5)^{400} \equiv (-1)^{400} = 1 \pmod{11}$. Enligt kinesika restsatsen är nu också $2^{2000} \equiv 1 \pmod{341}$.

**8. (a) Förklara vad man menar när man säger att de reella talen bildar en *ordnad* kropp.**
**(b) Motivera att de komplexa talen inte kan ordnas med en ordningsrelation. Visa t ex att både $i < 0$ och $i > 0$ leder till motsägelser.**

(a) Det betyder att vi kan tala om positiva reella tal: for ett tal $x \in \mathbb{R}$ gäller antingen $x > 0$, $x = 0$ eller $x < 0$. Om $x > 0$ och $y > 0$ så är även $x + y > 0$ och $xy > 0$.
(b) Vi har $i \neq 0$. Antar att det finns en ordningsrelation. Om $i > 0$ så är $i^2 = -1 > 0$; men $-1 < 0$. Alltså är $-i > 0$. Men då är $(-i)^2 = -1 > 0$, vilket inte stämmer. Därför kan de komplexa talen inte ordnas med en ordningsrelation.