Lösningar till tentan i MAL 200 del 4 och MAL 220 del 2

1. (a) I $\mathbb{Z}_4$ saknar 2 invers eftersom $x \odot 2$ blir 0 eller 2 men aldrig 1 för något $x \in \mathbb{Z}_4$.

   (b) T ex två trianglar som överensstämmer i två vinklar och mellanliggande sida, är kongruenta.

   (c) T ex relationen given av $x \sim y \Leftrightarrow x$ är halvsyskon med y på mängden av människor. Om t ex x och y har samma mamma och y och z har samma pappa behöver inte x och z ha någon förälder gemensamt och därmed är de inte halvsyskon.

2. Ser nu att n^2 antar följande värden. Söker n så att $n^2 + 2 = 0$ modulo 3, d v s så att $n^2 = 1$ modulo 3.

n	0	1	2
n^2	0	1	1

   Slutsaten är alltså att för $n = 1$ eller $n = 2$ modulo 3, d v s för alla n sådana att $3 \not| n$ gäller $3 | n^2 + 2$.

3. (a) $(x - \sqrt{2})(x - i) = x^2 - (\sqrt{2} + i) + i\sqrt{2}$.

   (b) $(x - \sqrt{2})(x - i)(x + i) = (x - \sqrt{2})(x^2 + 1) = x^3 - \sqrt{2}x^2 + x - \sqrt{2}$.

   (c) $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - i)(x + i) = (x^2 - 2)(x^2 + 1) = x^4 - x^2 - 1$.

   Dessa är alla av lägsta möjliga grad.

4. (a) Ja, ty uttrycket är helt symmetriskt i x och y.

   (b) Ja, ty

$$(x \star y) \star z = (xy - x - y + 2) \star z = (xy - x - y + 2)z - (xy - x - y + 2) - z + 2$$
$$x \star (y \star z) = x \star (yz - y - z + 2) = x(yz - y - z + 2) - x - (yz - y - z + 2) + 2.$$

   och förenkling visar att leden är lika.

   (c) Ja, $x \star 2 = x2 - x - 2 + 2 = x$ så 2 är det neutrala elementet.

   (d) Tag x och sök y så att $x \star y = 2$. Finner att

$$2 = x \star y = xy - x - y + 2 = y(x - 1) - x + 2 \iff y = -\frac{x}{x - 1}$$

   vilket blir ett heltal bara då $x = 0$ och $x = 2$. Alltså har bara elementen utom 0 och 2 och de är sina egna inverser.

5. (a) På första stolen kan man placera 6 olika personer. På andra stolen finns 5 kvar att välja bland, o s v. Multiplikationsprincipen ger $6! = 720$ olika möjligheter.

   (b) Välj först ut stolarna som kvinnorna sitter på. Det finns två möjliga sätt att göra detta. Sedan kan man placera ut kvinnorna på dessa stolar på 3! olika sätt på dessa stolar och männen på 3! olika sätt på de återstående stolarna. Totalt kan detta alltså göras på $2\dot{3}!\dot{3}! = 72$ olika sätt.

   (c) Välj ut stolarna som kvinnorn skall sitta på. Det kan göras på 4 olika sätt. Sedan blir problemet som ovan. Får totalt $4\dot{3}!\dot{3}! = 144$ olika möjligheter.

6. Antag att vi har en fyrhörning med hörn A,B,C och D. Dra diagonalen AC. Vi behöver ni visa två implikationer.

   Först antag att fyrhörningen är en parallellogram. Då inser vi att eftersom sidorna AB och CD är parallella är alternatvinklarna BAC och ACD kongruenta enligt följdsats till Sats 7. På samma sätt inses att då sidorna AD och BC är parallella att vinklarna ACB och CAD är kongruenta. Eftersom diagonalen är gemensam i de två deltrianglarna ger kongruensfallet v-s-v att trianglarna är kongruenta och därmed är motstående sidor i parallellogramens kongruenta d v s lika långa.

   Omvänt antag att att motstående sidor i parrallellogrammen är lika långa, d v s kongruenta. Då ger kongruensfallet s-s-s att trianglarna är kongruenta. Därmed är vinklarna BAC och ACD kongruenta. Då dessa två är alternatvinklar ger sats 6 att sidorna AB och CD är parallella. Liknande argument visar att även sidorna AD och BC är parallella.

7. (a) Vi såg i uppgift 1 att 2 är en nolldelare i $\mathbb{Z}_4$ eftersom $2 \cdot 2 = 0$.

   (b) Tag godtyckligt $a \neq 0$ och antag att att $a \cdot b = 0$. Eftersom R är en kropp och $a \neq 0$ finns invers a^{-1}. Om vi förlänger med a^{-1} i $a \cdot b = 0$, ser vi att $b = 0$. Slutsatsen är alltså att a inte är nolldelare. Eftersom a var godtycklig betyder detta att kroppen R saknar nolldelare.

   (c) Visar det kontrapositiva påståendet: n ej primtal $\Rightarrow \mathbb{Z}_n$ ej kropp. Antag därför att $n = k * l$. Nu inser vi att k är en nolldelare i $\mathbb{Z}_n$ eftersom $k * l = n = 0$ modulo n, och därför är inte $\mathbb{Z}_n$ en kropp enligt ovan.

8. **Reflexivitet:** Vill kontrollera om $a \sim a$ d v som $a \star a^{-1} \in H$ för alla $a \in G$. Detta gäller ju eftersom $a \star a^{-1} = 1$ och då H är en delgrupp så innehåller den det neutrala elementet enligt definitionen för grupp.

   Symmetri: Antag att $a \sim b$ d v satt $a \star b^{-1} \in H$ och visa att $b \sim a$ d v satt $b \star a^{-1} \in H$. Detta inses eftersom om $a \star b^{-1} \in H$ måste dess invers $(a \star b^{-1})^{-1} = b \star a^{-1}$ också tillhöra H enligt definitionen för grupp.

   Transitivitet: Antag att $a \sim b$ och $b \sim c$, d v s att $a \star b^{-1} \in H$ och $b \star c^{-1} \in H$. Visa nu att $a \sim c$d v s att $a \star c^{-1} \in H$. Men detta följer direkt eftersom $a \star b^{-1} \star b \star c^{-1} = a \star c^{-1} \in H$ eftersom H är sluten.