Explorativ övning 12

TALBEGREPPET*

Övningens syfte är att bekanta sig med talbegreppet. Vi skall försöka få en bättre förståelse för hur och varför man definierar olika typer av tal: de naturliga, rationella, reella och komplexa. I första hand försök lösa följande uppgifter: **A**, 1, 2, 3 (a)–(c), **B, C, D** 1–4, **E** 1–2, **F, G**.

Vi följer texten i kompendiet "Talsystem och restaritmetiker" (avsnitt 12).

Övning A

1. Ge några exempel på talkroppar och talringar.
2. Ge två exempel på talringar som inte är kroppar.
3. Vilka av följande talmängder är ringar? Vilka av dem är kroppar?
   (a) $\{0, 1\}$,
   (b) $a + b\sqrt{3}$, där $a, b \in \mathbb{Z}$,
   (c) $a + b\sqrt{5}$, där $a, b \in \mathbb{Q}$,
   (d) $a + b\sqrt[3]{2}$, där $a, b \in \mathbb{Z}$,
   (e) $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, där $a, b, c \in \mathbb{Z}$,
   (f) $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$, där $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Övning B

Vi vet från avsnittet om talbegreppet att om d är ett heltal och $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ så bildar alla tal $\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in Q\}$ en utvidgning av talkroppen $\mathbb{Q}$ (en talkropp som är större än $\mathbb{Q}$).

1. Visa att $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \neq \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$.
2. Försök generalisera (1) och ge exempel på oändligt många olika talkroppar.

*MAL200/220, ht 01

Övning C

1. Vad anser du om likheten $(-1)(-1) = 1$: Är det en definition (dvs en "överenskommelse") eller en sats?

2. Visa att i varje ring R gäller följande likheter:

   (a) $a0 = 0$ då $a \in R$,

   (b) $(-1)(-1) = 1$,

   (c) $-(-a) = a$ då $a \in R$,

   (d) $(-a)b = -ab$ då $a, b \in R$,

   (e) $(-a)(-b) = ab$ då $a, b \in R$.

Övning D

Denna övning handlar om rationella och irrationella tal.

1. (a) Bestäm decimalutvecklingen av talen $\frac{3}{11}$ och $\frac{1}{7}$.

   (b) Motivera att decimalutvecklingen av ett rationellt tal är periodisk.

   Ledning: Analysera divisionsalgoritmen då man decimalutvecklar bråktalen.

   Anmärkning. Man visar ganska enkelt att om ett reellt tal har periodisk decimalutveckling så är det rationellt.

2. Låt a och b vara irrationella tal. Vad kan man säga om talen a^{-1} och ab ? är de också irrationella?

3. Försök förklara varför 0,999... = 1.

4. (a) Visa att $\sqrt{3}$ är icke-rationellt genom att jämföra antalet primfaktorer 3 till vänster och till höger i likheten $3n^2 = m^2$.

   (b) Visa på liknande sätt att $\sqrt{p}$ är icke-rationellt då p är ett godtyckligt primtal.

   (c) Har du några förslag på hur man kan generalisera (b)?

   (d) Visa att talet $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ inte är rationellt.

5. (a) Visa att talet ${}^{2}\log 5$ är icke-rationellt.

   (b) Kan du föreslå några andra tal, i stället för 5 i (a), för vilka samma påstående gäller?

Övning E

Låt K vara en ordnad kropp och $a, b, c \in K$.

1. Visa att K har följande egenskaper:

   (a) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$,

   (b) $a < b$ och $c > 0 \Rightarrow ac < bc$,

   (c) hur förändras (b) då man ersätter $a < b$ med $a \leq b$?

2. Visa att

   (a) $|ab| = |a||b|$,

   (b) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (triangelolikheten).

3. De naturliga talen bildar en växande följd $1 < 2 < 3$ ... som inte är begränsad. Utnyttja denna kunskap för att visa följande viktiga egenskaper hos talen:

   (a) “Arkimedes princip": Om a, b är två positiva reella tal så finns det ett naturligt tal n så att $na > b$.

   (b) Låt a, b vara två reella tal och låt $a < b$. Det finns ett rationellt tal $\frac{m}{n}$ sådant att $a < \frac{m}{n} < b$.

   Ledning: Välj n så att $n(a - b) > 1$. Välj därefter minsta m så att $m > nb$.

Övning F

Från texten i avsnitt 12 vet vi att de rationella talen (“bråktalen”) konstrueras från heltalen som par (a, b), där a och b är heltal och $b \neq 0$. Paret (a, b) uppfattas som lösningen till ekvationen $bx = a$. Ekvationen $dx = c$ har samma lösning som $bx = a$ precis då $ad = bc$. Det rationella talet $\frac{a}{b}$ är helt enkelt ekvivalensklassen av paret (a, b) då $(a, b) \sim (c, d)$ då och endast då $ad = bc$.

1. Skriv ut 3 ekvationer och motsvarande par (a, b) som svarar mot $x = \frac{3}{5}$.

2. Kontrollera att relationen $\sim$, definierad av $(a, b) \sim (c, d)$ då och endast då $ad = bc$, verkligen är en ekvivalensrelation.

3. När har ett rationellt tal $\frac{a}{b}$ en invers? Skriv inversen på formen $[(c, d)]$.

4. Kontrollera att om

   $$[(a, b)] = [(a', b')] \quad \text{och} \quad [(c, d)] = [(c', d')]$$

   är två rationella tal ($ab' = a'b$ och $cd' = c'd$) så gäller

   $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'} \quad \text{och} \quad \frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{a'}{b'}\frac{c'}{d'}$$

   (dvs summan och produkten av två rationella tal beror inte på hur dessa tal representeras i form av bråk).

Övning G

Från texten i avsnitt 12 vet vi att heltalen konstrueras från de naturliga talen som par (a, b), där a och b är naturliga tal. Paret (a, b) uppfattas som lösningen till ekvationen $b + x = a$. Ekvationen $d + x = c$ har samma lösning precis då $a + d = b + c$.

1. Skriv ut 3 ekvationer och motsvarande par (a, b) som svarar mot $x = 2$. Gör samma sak med $x = -3$.
2. Betrakta alla par (a, b), där $a, b \in \mathbb{N}$ och visa att relationen

$$(a, b)R(c, d) \iff a + d = b + c$$

   är en ekvivalensrelation.
3. Välj på ett enkelt sätt en representant för varje ekvivalensklass.
4. Motivera att det finns en bijektion mellan ekvivalensklasserna för R och heltalen (observera att om vi inte känner till heltalen så kan de definieras som ekvivalensklasser av paren (a, b)).

Övning H

1. Skriv följande kvaternioner på formen $a + bi + cj + dk$:
   (a) $(1 + i)(1 + j)$,
   (b) $(i + j + k)^2$,
   (c) $(1 + 2i + 3j + 4k)(1 - 2i - 3j - 4k)$,
   (d) ijk.
2. (a) Visa att $q = 1 + i + j + k$ och $\bar{q} = 1 - i - j - k$ satisfierar ekvationen $x^2 - 2x + 4 = 0$.
   (b) Visa att $q = a + bi + cj + dk$ satisfierar en kvadratisk ekvation med reella koefficienter.

Följande övning i stencilen "Talsystem och restaritmetiker" rekommenderas: **12.3.**