# AVSNITT 4

# ÄNDLIGT OCH OÄNDLIGT

Är det möjligt att jämföra storleken av olika talmängder? Har det någon mening om man säger att det finns fler irrationella tal än rationella? Är det överhuvudtaget möjligt att jämföra storleken av oändliga mängder? Sådana frågor sysselsatte människor redan för länge sedan och svaren på dem hade mycket viktiga konsekvenser för hela matematiken.

Storleken av två mängder, båda med ett ändligt antal element, kan jämföras genom att man räknar antalet element i dem. Den metoden är oanvändbar om två mängder är oändliga. Men det finns ett sätt att jämföra ändliga mängder som kan generaliseras till oändliga. I stället för att räkna antalet element i två mängder $A$ och $B$ för att avgöra vilken av dessa som innehåller flest element, kan man försöka para ihop elementen i $A$ med elementen i $B$ så att olika element i $A$ svarar mot olika element i $B$ och varje element i $B$ tillhör något par. Om det är möjligt så kan man säga att $A$ och $B$ har lika många element. Om det finns element i $B$ som inte tillhör något par, så är slutsatsen att $B$ innehåller fler element än $A$. Om man inte har lyckats para ihop elementen i $A$ och $B$ därför att elementen i $B$ har tagit slut innan alla element i $A$ fick bilda ett par så kan man säga att $A$ har fler element än $B$.

För att formalisera parbildning till ett matematiskt begrepp introducerar man funktionsbegreppet. Vi repeterar först den allmänna definitionen av begreppet funktion även om de funktioner som vi betraktar i detta avsnitt har mycket speciella egenskaper.

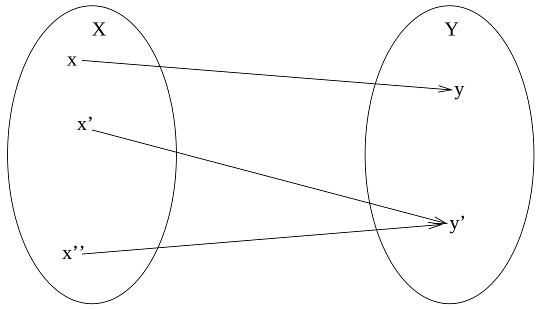
**(4.1) Definition.** Med en **funktion** från en mängd $X$ till en mängd $Y$ menar man en regel som till varje $x \in X$ ordnar exakt ett element $y \in Y$. Man brukar beteckna funktioner med bokstäver (eller speciella symboler – se exempel nedan). Om $f$ betecknar en funktion från $X$ till $Y$ som till $x \in X$ ordnar $y \in Y$ så skriver man $y = f(x)$ och $f : X \to Y$. $\square$

**(4.2) Exempel.** (a) Låt $X = Y = \mathbb{R}$. Om det tal som svarar mot $x \in X$ är $x^2 \in Y$ så skriver man $y = f(x) = x^2$. Andra exempel på funktioner från $X = \mathbb{R}$ till $Y = \mathbb{R}$ är $y = x^3$, $y = 2^x$, $y = \sin x$ osv. Vi kan också skriva: $y = g(x) = x^3$, $y = h(x) = 2^x$, $y = \varphi(x) = \sin x$ osv.

(b) Låt $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ och $Y = \{-1, 1\}$. Låt $f(1) = -1$, $f(2) = 1$, $f(3) = -1$, $f(4) = 1$, $f(5) = -1$. Vi har inte skrivit någon formel, men vi har definierat en funktion genom att direkt föreskriva vad som svarar mot varje element i mängden $X$ (i detta fall kan man skriva en formel – försök hitta en sådan!).

(c) Låt $X$ vara mängden av alla människor och låt $Y$ vara mängden av alla naturliga tal. Definiera $f(x) =$ åldern av $x$ uttryckt i antalet dagar varvid en "påbörjad" levnadsdag räknas som en hel dag. Det är inte så lätt att beräkna värdet $y = f(x)$ då $x$ t ex betecknar just Dig. $\square$

Man kan åskådliggöra en funktion $f : X \to Y$ som pilar från $x \in X$ till $y = f(x) \in Y$ – se fig. 1. Man säger ofta att $y = f(x)$ är **bilden** av $x$ eller att $f$ **avbildar** $x$ på $y = f(x)$.




De funktioner som vi behöver för att jämföra olika mängder skall avbilda olika $x$ på olika $y$. Vi gör följande definition.

**(4.3) Definition.** Man säger att en funktion $f : X \to Y$ är **injektiv** (eller **en–entydig**) om $x_1 \neq x_2$ medför att $f(x_1) \neq f(x_2)$. Man kallar $f$ **surjektiv** (eller **på hela** $Y$) om varje element $y$ i $Y$ är bilden av (minst) ett element $x$ i $X$. En funktion som både är injektiv och surjektiv kallas **bijektiv**. $\square$

**(4.4) Exempel.** (a) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, där $y = f(x) = x^2$ är inte injektiv, ty $3 \neq -3$, men $f(3) = 3^2 = (-3)^2 = f(-3)$ (det går lika bra att välja ett annat nollskilt tal i stället för 3). Den är inte heller surjektiv därför att t ex $-1$ inte är bilden av något $x \in \mathbb{R}$ – det finns inget $x \in \mathbb{R}$ sådant att $f(x) = x^2 = -1$.

(b) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, där $f(x) = 2^x$ är injektiv därför att $x_1 \neq x_2$ implicerar att $2^{x_1} \neq 2^{x_2}$ (tänk på funktionskurvan för $f$!). Men $f$ är inte surjektiv därför att $f(x)$ alltid är ett positivt tal (negativa tal och 0 är inte bilder). Man kan välja $X = \mathbb{R}$ och $Y = \mathbb{R}_{>0}$ dvs välja som $Y$ mängden av de positiva reella talen. Då är funktionen $f : X \to Y$, där $f(x) = 2^x$ både surjektiv och injektiv dvs bijektiv. $\square$

Vi kan tänka på en injektiv funktion $f : X \to Y$ som pilar från $X$ till $Y$ sådana att pilar från olika $x$ slutar i olika $y$. Om $f$ är surjektiv så är varje $y \in Y$ ändpunkten av (minst) en pil från $X$.

Om nu $A$ och $B$ är två mängder så kan vi betrakta dem som lika stora om det finns en bijektiv funktion från den ena till den andra. Vi uttrycker det på följande sätt:

**(4.5) Definition.** Man säger att två mängder A och $B$ har samma **kardinalitet** (eller samma **mäktighet**) om det finns en bijektiv funktion $f : A \to B$. □

Detta betyder att mot varje $a \in A$ svarar $b = f(a) \in B$ på ett sådant sätt att mot olika $a$ svarar olika $b$ och att varje $b$ svarar mot något $a$. Paren är $(a, f(a))$. Intuitivt betyder existensen av $f$ att $A$ och $B$ har lika många element. Den intuitionen leder till en del överraskningar när man betraktar oändliga mängder. Men låt oss börja med några exempel då mängder är ändliga.

**(4.6) Exempel.** (a) Mängderna $A = \{3, 4, 5\}$ och $B = \{11, 12, 13\}$ har samma kardinalitet. Man kan helt enkelt räkna antalet element i dessa mängder – bägge har 3 element. Men vi vill använda den andra metoden dvs parbildning. Alltså behöver vi en bijektiv funktion från $A$ till $B$. Ett exempel på en sådan funktion är följande: $f : A \to B$, där

$$f(3) = 11, \quad f(4) = 12 \quad f(5) = 13$$

dvs vi har bildat tre par $(3, 11), (4, 12), (5, 13)$.

(b) Mängden $A = \{x \in \mathbb{R}|\ x^2 - 4x + 3 = 0\}$ och $B = \{Feskekyrkan, Matematiskt\ centrum\}$ har samma kardinalitet. Man konstaterar lätt att $A = \{1, 3\}$ så att bägge mängderna har 2 element. Men vi kan lätt definiera en bijektiv funktion $f : A \to B$, där $f(1) = Feskekyrkan$ och $f(3) = Matemaiskt\ centrum$, vilken ger paren $(1, Feskekyrkan)$ och $(3, Matematiskt\ centrum)$. □

De naturliga talen $0, 1, 2, 3...$ svarar mot kardinaliteter av olika ändliga mängder: 0 är antalet element i den tomma mängden, 1 är antalet element i varje mängd som har samma kardinalitet som t ex den mängd som består av endast Dig, 2 är antalet element i varje mängd som har samma kardinalitet som t ex den mängd som består av Dig och Din bästa kompis, osv. Man kan naturligtvis ställa frågan vad man menar med en ändlig mängd. Den frågan besvarades mycket skickligt av en stor tysk matematiker Richard Dedekind år 1888. Enligt Dedekind är **$M$ en ändlig mängd om $M$ inte har samma kardinalitet som någon av dess äkta delmängder**. Detta betyder att det inte finns en bijektiv funktion från $M$ till en av dess delmängder $N$ med $N \neq M$. Man kan också uttrycka det så att det inte är möjligt att para ihop elementen i $M$ med elementen i dess äkta delmängd $N$ (så att olika element i $M$ svarar mot olika element i $N$). Vi skall se om en liten stund att en del av en oändlig mängd kan ha samma kardinalitet som hela mängden.

**(4.7) Exempel.** $\mathbb{N}$ och $\mathbb{Z}$ har samma kardinalitet (är “lika stora"). För att visa det kan vi bilda en följd av heltalen:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \dots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \end{array}$$

och numrera heltalen i övre raden med hjälp av de naturliga talen som pilarna visar. På det sättet får vi en bijektion mellan $\mathbb{N}$ och $\mathbb{Z}$. Man kan definiera $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mera formellt:

$$f(n) = \begin{cases} (1-n)/2 & \text{om } n \text{ är udda} \\ n/2 & \text{om } n \text{ är jämnt} \end{cases}$$

□

En mängd som har samma kardinalitet som $\mathbb{N}$ kallas **uppräknelig**. Vårt sista exempel säger att $\mathbb{Z}$ är uppräknelig. Man kan säga att en mängd $A$ är uppräknelig om dess element kan ordnas i en följd $a_1, a_2, a_3, \dots$ , därför att en bijektion $f : \mathbb{N} \to A$ numrerar elementen i $A$ med hjälp av de naturliga talen: $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3, \dots$ osv. Om $A$ är uppräknelig så säger man att $A$ har *uppräkneligt många element* eller *uppräkneligt antal element.*

Nu vill vi visa att $\mathbb{Q}$ är uppräknelig, men låt oss innan dess göra en mycket enkel observation som kommer att visa sig mycket nyttig:

**(4.8) Lemma.** *Om $A$ är en uppräknelig mängd och $B$ är en ändlig eller uppräknelig mängd så är $A \cup B$ uppräknelig.*

**Bevis.** Om $a_1, a_2, a_3, \dots$ är följden av alla element i $A$ och $b_1, b_2, b_3, \dots$ är följden av alla element i $B$ (den följden kan vara ändlig), så kan man bilda följden $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots$ som innehåller alla element i $A \cup B$ möjligen med upprepningar. Ur den följden kan vi nu stryka varje element vid dess upprepade förekomst och då får vi en följd av alla element i $A \cup B$. Detta visar att $A \cup B$ är uppräknelig. □

**(4.9) Exempel.** $\mathbb{Q}$ är uppräknelig. Först visar vi att mängden av positiva rationella tal är uppräknelig. För att göra det skriver vi ut alla positiva rationella tal i form av tabellen:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & \longrightarrow & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \longrightarrow & \frac{1}{4} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & & \\
\frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \cdots \\
 & & & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

Den omfattar alla positiva rationella tal med en del upprepningar. Nu kan man bilda en följd av dessa tal genom att tilldela dem i tur och ordning de naturliga talen 1,2,3,... då man startar i $\frac{1}{1}$ och följer pilen i enlighet med fig 2. Man hoppar över de tal som man redan har påträffat. Alltså är:

$$
\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \cdots \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots
\end{array}
$$

(Man hoppar här över $\frac{2}{2} = \frac{1}{1}$). Detta visar att positiva rationella tal bildar en uppräknelig mängd. Men även negativa rationella tal bildar en uppräknelig mängd (man kan byta alla tecken i fig 2 och resonera som tidigare eller utnyttja funktionen $f(x) = -x$ som ger en bijektion mellan alla positiva och alla negativa rationella tal). Om vi nu tar $A =$ alla positiva rationella tal och $B =$ alla negativa rationella tal så får vi enligt Lemma (4.8) att $\mathbb{Q} = A \cup B \cup \{0\}$ är uppräknelig ($A \cup B$ är uppräknelig som union av två uppräkneliga mängder och $(A \cup B) \cup \{0\}$ är uppräknelig som union av en uppräknelig och en ändlig mängd). $\square$

Nu ger vi exempel på en mycket viktig icke-uppräknelig mängd:

**(4.10) Sats.** $\mathbb{R}$ *är inte uppräknelig.*

**Bevis.** Antag motsatsen dvs att man kan bilda en följd av alla reella tal. Då kan man också bilda en följd av alla reella tal i intervallet (0,1) (som en delföljd av alla reella tal):

$$x_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}...a_{1n}...$$
$$x_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}...a_{2n}...$$
$$..................$$
$$x_i = 0, a_{i1}a_{i2}a_{i3}...a_{in}...$$
$$..................$$

där $a_{in}$ är $n : te$ decimalsiffran i en decimalutveckling av $x_i$. Betrakta nu talet

$$x = 0, b_1 b_2 b_3 ... b_n ...,$$

där

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{om } a_{ii} \neq 1, \\ 2 & \text{om } a_{ii} = 1. \end{cases}$$

Trots att talet $x$ ligger i intervallet $(0, 1)$ kan det inte finnas bland talen $x_1, x_2,...,x_i, ...$ därför att $i$:te decimalsiffran av $x$ inte är lika med $i$:te decimalsiffran av $x_i$ så att $x \neq x_i$ * för $i = 1, 2, ....$ □

Den sista satsen visades av G. Cantor† 1872. En av dess konsekvenser är att de irrationella talen är "fler" än de rationella därför att de irrationella talen bildar en icke-uppräknelig mängd, medan de rationella bildar en uppräknelig. Tag nämligen $A$ = rationella tal och $B$ = irrationella tal. Då är $\mathbb{R} = A \cup B$ och eftersom $A$ är uppräknelig så måste $B$ vara icke-uppräknelig ty annars är $A \cup B$ uppräknelig enligt Lemma (4.8). Vi vet redan (se avsnittet om "Induktion och deduktion") att t ex $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal. Trots att de irrationella talen är "fler" än de rationella kan det tyckas som att det är svårare att ge exempel på irrationella tal än på rationella. Så är dock inte fallet: så snart vi har ett irrationellt tal har vi oändligt många, ty om $a$ är irrationellt och $r$ är rationellt så är $a + r$ irrationellt (Visa detta! Om $r \neq 0$ så är f.ö. även $ar$ irrationellt), så varje irrationellt tal ger upphov till lika många irrationella tal som det finns rationella tal.

G.Cantor visade ett annat resultat om talmängder som spelade en mycket viktig roll i matematikens utveckling och befäste betydelsen av hans teori. Detta var hans bevis av att de sk *transcendenta* talen (som t ex $\pi$ och $e$) är fler än de *algebraiska* (dvs rötter till polynomekvationer med rationella koefficienter).

* $x$ kan inte ha två olika decimalutvecklingar därför att om ett tal har två olika decimalutvecklingar så har en av dem oändligt många siffror 0, och den andra, oändligt många siffror 9.

† Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) en tysk matematiker som lade grunden för den moderna mängdteorin.