Explorativ övning 1

Denna övning tillägnas minnet av Kicki Nystedt
som medverkade vid sammanställningen av uppgifterna.
J.B. och M.M.

MATEMATIKENS SPRÅK*

Syftet med denna övning är att med hjälp av logik lära oss att uttrycka matematik mer exakt, lära oss förstå språket. Vi skall försöka utveckla vårt matematiska språk, vi vill uppnå största möjliga intentionsdjup, dvs största möjliga precision och klarhet. Följande begrepp är viktiga i detta sammanhang

- Utsagor – öppna och slutna.
- Logiska konnektiv som disjunktion, konjunktion, implikation, ekvivalens, negation.
- Negation och motsats.
- Kvantorer.

Vi följer avsnitten 1.3 – 1.7 i Vretblads bok (se kurslitteratur).

Övning A

1. Under vilka omständigheter är följande påståenden sanna respektive falska? För vilka värden på variablerna?

   (a) $3 \leq 3$,

*__MAL200, ht99__

(b) $3 \leq 4$,
(c) $3 < 4$,
(d) $(x+1)^2 \leq x^2 + 2x + 1$,
(e) $(x+1)^2 = x^2 + 2x$,
(f) $\sqrt{36} = 6$,
(g) $x > 3$ medför att $x^2 > 9$,
(h) $x^2 = 36$ medför att $x = 6$ eller $x = -6$,
(i) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

2. Vad är en utsaga? (Läs om utsagor i Vretblads bok på sid. 13.)
3. Vilka av påståendena ovan är öppna utsagor respektive slutna utsagor?

Övning B

1. Betrakta två utsagor A = "*I morgon kommer regn*" och B = "*I morgon kommer snö*". När är utsagan

$$A \text{ eller } B$$

sann?

2. Betrakta nu två andra utsagor A = "*I morgon klockan 9 är jag i Stockholm*" och B = "*I morgon klockan 9 är jag i Göteborg*". När är utsagan

$$A \text{ eller } B$$

sann?

3. Diskutera när en disjunktion "*A eller B*" är sann respektive falsk i relation till om A resp. B är sanna eller falska. Hitta på egna exempel! Jämför Dina tankar med texten i Vretblads bok, sid.15. Disjunktionen "*A eller B*" betecknas $A \vee B$.

Övning C

1. Låt A vara utsagan "*I morgon är en söndag*" och B utsagan "*I morgon kommer snö*". När är utsagan

$$A \text{ och } B$$

sann?

2. Diskutera när en konjunktion "*A och B*" är sann respektive falsk i relation till om A resp. B är sanna eller falska. Hitta på egna exempel! Konjunktionen "*A och B*" betecknas $A \wedge B$.

Övning D

1. Låt A vara utsagan $x > 4$ och B utsagan $x > 2$. Det är rimligt att uppfatta utsagan

   $$A \text{ \textit{medför att} } B$$

   som sann för alla reella tal x (vad tycker Du?). Testa utsagan för $x = 5, 3$ och 1. Anteckna sanningsvärdena för A och B i varje fall.

2. Diskutera när en implikation "*A implicerar B*" (eller "*A medför (att) B*") är sann respektive falsk i relation till om A resp. B är sanna eller falska. Hitta på egna exempel! En implikation "*A implicerar B*" betecknas $A \Rightarrow B$.

Övning E

1. Låt A vara utsagan $x > 2$ och B utsagan $x + 1 > 3$. Det är rimligt att uppfatta utsagan

   $$A \text{ \textit{är ekvivalent med} } B$$

   som sann för alla reella tal x (vad tycker Du?). Testa utsagan för $x = 3$ och 1. Anteckna sanningsvärdena för A och B i varje fall.

2. Diskutera när en ekvivalens "*A är ekvivalent med B*" (eller "*A då och endast då B*") är sann respektive falsk i relation till om A resp. B är sanna eller falska. Hitta på egna exempel! Ekvivalensen betecknas med $A \Leftrightarrow B$.

Övning F

1. Disjunktion, konjunktion, implikation och ekvivalens är exempel på logiska konnektiv. Gör sanningstabeller för dessa konnektiv, dvs fyll i tabellen i vilken S säger att utsagan är sann och F att den är falsk:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
S	S	?	?	?	?
S	F	?	?	?	?
F	S	?	?	?	?
F	F	?	?	?	?

2. Ofta betraktar man mera komplicerade uttryck som t ex $(A \wedge B) \vee C$. Hur många rader har en sanningstabell med 3 variabler? Med n variabler?

3. Gå tillbaka till exemplen i övning A. Skriv 1,2 och 4 som sammansatta utsagor med hjälp av något logiskt konnektiv. Diskutera åter sanningsvärdena.

Övning G

1. Är $1 = 2$? Titta på följande resonemang:

   Låt $a = b$. Då gäller:

$$\begin{aligned} a = b \quad &\Rightarrow \quad ab = b^2 \Rightarrow ab - a^2 = b^2 - a^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad a(b-a) = (b+a)(b-a) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad a = b + a \overset{b=a}{\Rightarrow} a = 2a \Rightarrow 1 = 2. \end{aligned}$$

2. Är resonemanget riktigt? Var ligger felet?

3. Om man ändå antar att $1 = 2$ kan man visa då att alla positiva heltal är lika, dvs $1 = 2 = 3 = 4 = ...$?

Övning H

1. Vad menas med motsatsen till ett påstående? Vad är negationen av en utsaga? Tänk först och jämför därefter Dina tankar med texten på sid. 16 i Vretblads bok.

2. Betrakta utsagorna:

   (a) Jag dansar och jag sjunger!
   (b) Jag äter eller jag sover. (Citat: Skalman)
   (c) Om det regnar har jag med mig paraplyet.
   (d) Alla människor tycker om matematik!
   (e) Det finns åtminstone en student som inte kan göra en nollbricka rätt!

   Formulera negationen av de tre första utsagorna? Skriv utsagorna och deras negationer med konnektiv.

3. Negera även de två sista påståendena. Vad skiljer dem från de övriga?

Övning I

1. Betrakta utsagan "*Om jag är flitig så klarar jag matematikkursen*". Vad är motsatsen till denna utsaga? Försök formulera allmänt hur man negerar en utsaga "$A \Rightarrow B$". Kan du skriva en formel som utrycker negationen "$\neg(A \Rightarrow B)$"? (Tänk själv och jämför därefter med Vretblad, sid. 21).

Övning J

1. Vad är en ekvation? Vilka av följande påståenden (x och y är reella tal) är sanna?

(a) $x = y \Rightarrow x^2 = y^2$
(b) $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$
(c) $x = y \Leftrightarrow x^2 = y^2$
(d) $x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y|$

2. Vilka påstående ovan är falska? Ge motexempel!

3. Diskutera vad ett motexempel är och hur de används!

4. Gå tillbaka till de två sista påståendena i övning H och formulera dem med kvantorer. Hur ser negationerna ut?

Övning K

1. Betrakta två påståenden: "*Till varje heltal finns det motsatta talet*" (dvs för varje heltal a finns ett heltal a' så att $a + a' = 0$) och "*Det finns det motsatta talet till alla heltal*". Formulera dessa påståenden med hjälp av kvantorer. Betyder dessa påståenden samma sak? Om inte vari består skillnaden?

2. Betrakta nu två andra påståenden: "*För varje människa finns ett tal som uttrycker hennes längd*" och "*Det finns ett tal som uttrycker längden av varje människa*". Låt x betecknar en människa och låt $l(x)$ vara hennes längd (säg, i centimeter). Formulera dessa påståenden med hjälp av kvantorer. Betyder de samma sak?

Följande övningar i Vretblads bok rekommenderas (nummer i den gamla boken inom parentes):

Vretblad: 1.9 (108), 1.10 (109), 1.11 (110), 1.14 (111), 1.15 (112), 1.16 (113), 1.18 (115), 1.25 (117) a), 1.26 (118) b) d), 1.48 (139), 1.49 (141).