Explorativ övning 11

GEOMETRI*

Syftet med denna övning är att ge en uppfattning om vad geometri är men också att ge specifika kunskaper om några grundläggande begrepp och satser.

Euklidisk geometri har under århundraden varit en viktig del av skolans matematikundervisning. Den första svenka Euklides utgåva publicerades av Mårten Strömer (1707–1770). I Sverige följer vi fortfarande hans terminologi.

Euklides börjar med definitioner (t ex *Punkt kallas det som ej har några delar*). Sen följer fem postulat:

1. Det fordras att man kan dra en rät linje från en punkt till en annan.
2. Och att varje begränsad rät linje kan förlängas obegränsat.
3. Och att man kring varje medelpunkt kan beskriva en cirkel med given radie.
4. Och att alla räta vinklar är lika stora.
5. Och när en rät linje träffar två andra räta linjer, och de båda inre vinklarna på samma sida om den skärande räta linjen är mindre än två räta, så skall de båda räta linjerna, om de förlängas obegränsat, råkas på den sida om den skärande räta linjen som de båda vinklerna ligger som är mindre än två räta.

I klassiskt grekisk terminologi är ett postulat specifikt för en vetenskap medan ett axiom gäller för alla vetenskap. Euklides använder sig av följande axiom:

1. Storheter som är lika med en och samma storhet är sinsemellan lika.
2. Och när man adderar lika storheter till lika storheter, så blir även de hela lika stora.

*__MAL200, ht 99__

3. Och när lika storheter subtraheras från lika storheter, så blir även resterna lika stora.

4. Och storheter som täcker varandra är lika stora.

5. Det hela är större än sin del.

Strömer förklarar att vetenskapen om storheter benämnas **Matematik**; den delen av matematiken som handlar om storheter vilka har usträckning (längd, bredd och höjd) heter **Geometri**. I Strömers formulering lyder fjärde axiomet: *[Congruenta]*, d.ä. de, som till alla delar träffa in med hvarandra, *eller passa tillhopa, när det ena lägges på det andra* äro lika stora. Den kursiva texten är Strömers tillägg.

Att lägga en figur på en annan använder Euklides i sitt bevis för första kongruensfallet. Det är ett helt naturligt argument, som före hans tid ofta användes, men som Euklides tydligen inte gillar. Han använder detta i brist på bättre. Lösningen är att anta satsen som axiom, som kompendiet gör.

Viktiga begrepp och satser är:

- kongruens och kongruensfallen
- basvinkelsatserna
- parallella linjer: sats 6 och 7 med följdsats
- yttervinkelsatsen, vinkelsumman i en triangel
- längd och area
- likformighet och likformighetsfallen
- Pythagoras sats
- bisektriser och medianer
- in- och omskrivna cirklar
- cirkeln: kordasatsen

Övning A

1. Vad är en axioma / postulat? Vad menas med en axiomatisk teori?

2. Jämför Euklides postulat med de axiom i kompendiet. Likheter / skillnader? Vad saknas hos Euklides?

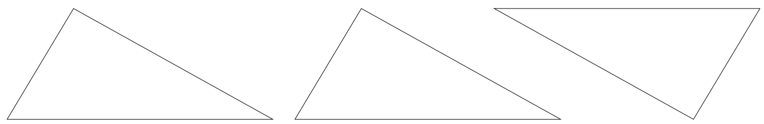
Övning B

Läs om konstruktioner med passare och linjal i kompendiet (S. 15)

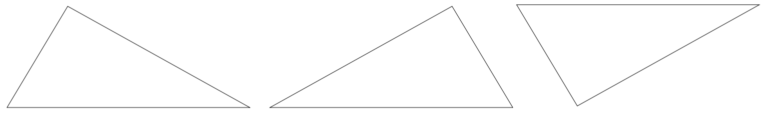
1. Konstruera en liksidig triangel på en given sträcka AB.
2. Given en sträcka BC och en linje AA', konstruera på linjen en punkt D på samma sida av A som A' sådant att $BC \cong AD$.
3. Gör konstruktionen ovan utan att ta passaren från pappret. Här hjälper Euklides konstruktion (I.2): dra AB och konstruera en liksidig triangel ABE. Cirkeln med medelpunkt B genom C skär BE i F. Cirkeln med medelpunkt E genom F skär EA i G. Sträckan AG är nu kongruent med BC. Vi konkluderar att vi får i fortsättningen ta passaren från pappret.
4. Givet tre sträckor, konstruera en triangel med sidor kongruenta med de tre givna sträckorna.
5. Givet en vinkel $\angle DCE$ och en sträcka AB, konstruera en vinkel med spets A och en ben lika med AB, som är kongruent med $\angle DCE$.
6. Givet en vinkel och två sträckor, konstruera en triangel med två sidor kongruenta med de givna sträckor och en vinkel kongruent med den givna vinkeln. Lös samma uppgift för två givna vinklar och en sträcka. Hur är det med tre vinklar? Hur många lösningar finns det i varje fall?

Övning C

1. Vad betyder att två figurer är lika, lika stora eller kongruenta?
2. Är följande trianglar till synes lika. Är de kongruenta?



3. Samma fråga om trianglarna:



   Vad är skillnaden mellan båda fall?

4. Vad krävs i definitionen för trianglar att vara kongruenta? Vilken information räcker för att konkludera att de är kongruenta? (Jämför konstruktionsuppgifterna ovan).
5. Vilka kongruensfall kan du hitta för fyrhörningar?

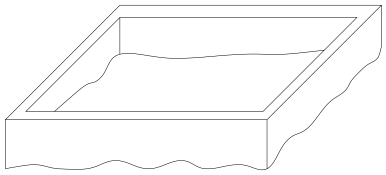
Övning D

Parallellogrammen.

1. Vet du vad en parallellogram är? Kolla nu i kompendiet S. 7, Exempel 2.
2. Visa att motstående vinklar i en parallellogram är kongruenta.
3. Visa att motstående sidor i en parallellogram är kongruenta.
4. Visa att om alla fyra vinklarna i en fyrhörning är räta, så är fyrhörningen en parallellogram.
5. I parallellogrammen $ABCD$ är $\angle A$ rät. Visa att $ABCD$ är en rektangel.
6. Visa att om i en fyrhörning motstående sidor är lika stora, så är fyrhörningen en parallellogram.
7. Visa att diagonalerna i en parallellogram delar varandra mitt itu.

Övning E

Många människor (alla snickare) vet hur man genom att enbart mäta längder (t ex med måttband) kan kontrollera om en husgrund (eller ett rum, o s v) är rektangulär. (Om ni inte vet ingår det i uppgiften att tänka ut detta).



1. Skriv upp alla steg i en sådan process.
2. Bevisa att metoden är korrekt.
3. Diskutera värdet med att ge ett sådant bevis: bra/dåligt? Varför?

Övning F

Gör uppgifter 37, 1, 2, 4, 5 och 6 i kompendiet (S. 19 och17).

Övning G

Längd och mätning. Redan tidigare användes begreppet längd av en sträcka (hur?). Man tar väl för givet att varje sträcka kan tillordnas ett mätetal, som är ett reellt tal.

1. Diskutera vad som menas med detta. Vad menas med en enhet? Kan en enhet delas, kan den delas hur många gånger som helst?.

2. Läs om längd i kompendiet S. 7.

3. Diskutera möjligheten att mäta sträckor som har rationella mätetal.

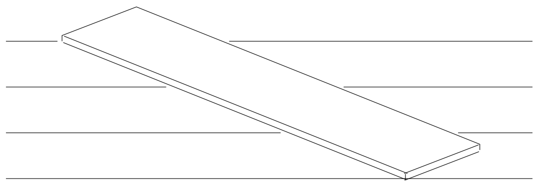
4. Vad menas med kommensurabla sträckor? Hur kan man avgöra om två sträckor är kommensurabla?

5. Vad menas med avståndet mellan två (parallella) linjer? Hur mäter man det?

Övning H

Likformighet.

1. Om man vill dela en bräda i 3 lika delar så kan man skaffa sig 4 parallella linjer (t ex springor i ett parkettgolv) med lika avstånd.



Ni får förtydliga metoden själva. Verkar den praktisk? Varför är den korrekt? (Ger ett bevis!).

2. Hitta på en metod att dela brädan i förhållandet $2 : 5$, $1 : 4$, $1 : n$, $m : n$.

3. Jämför metoden med konstruktionsproblem 5 på S. 15 i kompendiet.

Övning I

1. Tänk igen på vad som menas med att två figurer är lika, är kongruenta, har samma form.

2. Behöver två figurer som har samma form vara kongruenta och/eller lika? Varför / varför inte? Har två kvadrater samma form. När är de lika eller kongruenta?

3. Hitta en rektangel sådan att om man tar bort en kvadrat så återstår en rektangel med samma form som den ursprunliga (jfr. uppgift 40 på S. 19).

4. Vad menas med att två trianglar är likformiga? Jämför med kongruensdefinitionen.

Övning J

Varför byter en spegel höger och vänster, men inte upp och ner, och vad händer om du inte står men ligger framför spegeln?

Övning K

1. I Kristin Dahls bok (S. 10) finns följande uppgift: rita en fyrhörning och markera sidornas mittpunkter. Bind ihop mittpunkterna med raka streck. Du får en parallellogram! Gör fler fyrhörningar.
2. Diskutera med människor i din omgivning. Blir du / de övertygade? Av vad och varför? Är det roligt? Varför / varför inte?
3. Visa att man alltid får en parallellogram (jfr. övn. 9, S. 17).

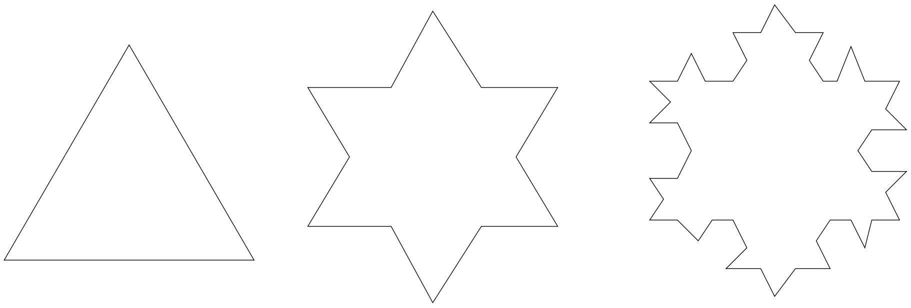
Övning L

1. Vet du vad *area* är? Vad är en yta. Vad är skillnaden?
2. Visa punkt 1 och 2 om area av parallellogram och triangel på S. 8 i kompendiet.

Övning M

1. Kan det vara så att en figur med ändlig area kan ha en godtycklig stor omkrets?

   Vi studerar von Kochs 'snöflingestjärna' (jfr. S. 26 i Kristin Dahls bok).



   Om vi kallar de olika stjärnorna S_i med triangeln S_1 som början, så kan vi beskriva att man får S_{i+1} ur S_i genom att sätta en liksidig triangel på den mittersta tredje delen av varje sida (och att ta bort dubbla sträckor).

2. Beräkna längden av omkretsen av stjärna S_n.
3. Beräkna S_n:s area.
4. Vad händer då $n \to \infty$?

Övning N

Pythagoras sats.

1. Formulera satsen.
2. Tag reda på så många bevis för Pythagoras sats som du kan.
3. Jämför beviset i kompendiet med Euklides bevis.
4. Vad behövs för att göra ‘klipp-och-klistra’-beviset (S. 10 i kompendiet) till ett riktigt bevis?
5. Gör ett bevis med hjälp av areaberäkningar i den vänstra figuren på S. 10.

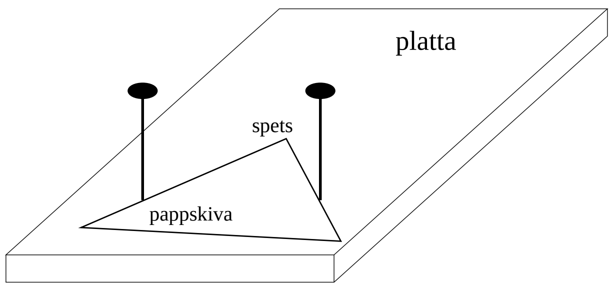
Övning O

Denna uppgift handlar om figuren på sista sidan. Klipp ut en av dem. Klipp därefter ut de 4 vita delfigurerna.

1. Kan du av dessa 4 vita bitar lägga en kvadrat med sidolängd 8?
2. Kan du av dem lägga en 5×13 rektangel?
3. Hur många rutor fanns i början? Blev du överraskad? Vad stämmer inte?
4. Vad är likheterna och skillnaderna mellan den här uppgiften och läggpusselbevisen för Pythagoras sats?

Övning P

Betrakta följande experimentuppställning bestående av en platta med två spikar och en triangelformad pappskiva. Gör en egen (plattan kan ersättas med en pappersark med två markerade punkter).



Om pappskivan skjutes in mot spikarna kommer spetsen att hamna i en bestämd punkt — markera denna punkt. Variera nu detta förfarande och du får en mängd punkter. Dessa punkter hamnar på en kontinuerlig kurva (varför?). Hur ser kurvan ut? Kan du bevisa ditt förmodan?

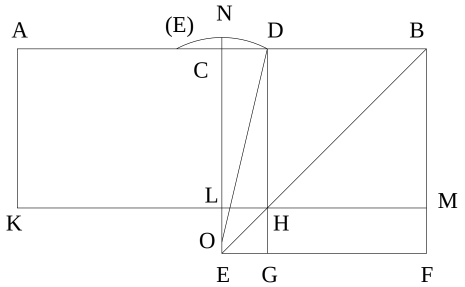
Övning Q

Om du befinner dig på havet och ser t ex två fyrar under konstant vinkel — trots att du rör dig — vad betyder det? Kan du hitta på ett sätt att kontrollera att du inte rör dig? (Detta kan vara viktigt om man ligger för ankar på redden.)

Övning R

Geometrisk lösning av andragradsekvationer.

Betrakta ekvationen $ax - x^2 = b^2$ (varför b^2 och inte b?). Låt sträckan AB vara given (med längd a). Låt C vara mittpunkten på AB och dra mittpunktnormalen. Låt CO:s längd vara lika med b. Dra ut linjen CO till N så att $ON \cong CB$ $(= \frac{1}{2}a)$. Cirkeln med medelpunt O och radie ON skär CB i D. Då är DB lösningen (med längd x).



1. Visa att lösningen stämmer med hjälp av Pythagoras sats, använd på triangeln OCD.

2. Vad är villkoret att det finns reella lösningar? Hur framgår detta från figuren? Hur många reela lösningar finns det då?

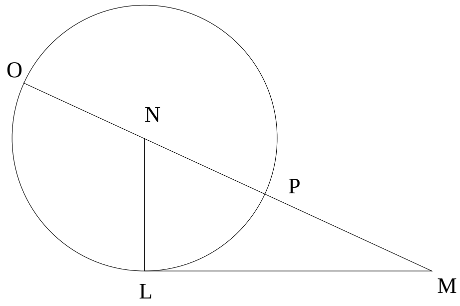
3. Resten av figuren passar till Euklides sats II.5: *Om en rät linje är skuren i två lika stora delar och i två delar som är inte lika stora, så är rektangeln av de olika delarna tillsammans med kvadraten på linjen mellan skärningspunkterna lika stor med kvadraten som uppritas på halva linjen.* Linjen BE är diagonalen i kvadraten $CEFB$ uppritad på halva linjen CB. Visa satsen (utan att räkna). Använd resultatet för att visa lösningens riktighet.

4. Lös ekvationen $ax + x^2 = b^2$: låt igen C vara mittpunkten på AB med $|AB| = a$ och dra BQ vinkelrätt mot AB av längd b. Cirkeln med medelpunkt C och radius CQ skär förlängningen av AB i D och BD är lösningen. Visa att det stämmer.

5. Hitta i samma figur lösningen till $x^2 - ax = b^2$.

6. Descartes ger en annan lösning för $x^2 - ax = b^2$: i triangeln NLM är $|LM| = b$ och $|LN| = \frac{1}{2}a$. Rita cirkeln OPL. Då är $|OM| = x$. Visa detta. Lös ekvationen $ax + x^2 = b^2$

på samma sätt.



7. För att lösa $ax - x^2 = b^2$ tar Descartes LN och LM som tidigare, men drar nu linjen genom M parallel med LN. Cirkeln med medelpunkt N genom L skär linjen i två punkter (vad är villkoret för detta?). Vad är nu ekvationens lösning?

8. Jämför lösningsmetoderna.

9. Givet en rektangel, konstruera en kvadrat med samma area.

Övning S

Lös uppgifter 8, 10–13, 18, 19, 21, 23, 27, 31, 34, 45 och 49 i kompendiet (S. 17, 18, 19 och 20).