Explorativ övning 14

KOMBINATORIK*

Kombinatoriken används ofta för att räkna ut antalet möjligheter i situationer som leder till många olika utfall. Den används också för att visa att ett önskat utfall är möjligt. Vi ägnar detta avsnitt åt några enkla och grundläggande kombinatoriska begrepp:

- Dirichlets lådprincip
- multiplikationsprincipen
- permutationer, kombinationer
- binomialsatsen

Mer om kombinatorik får du veta i statistikkursen. Nedan sammanfattar vi och exemplifierar några viktiga begrepp. Stencilen ger tillräckliga kunskaper för att klara övningarna nedan. Du kan också följa kapitel 5 i Vretblads bok.

En mycket enkel och oerhört viktig kombinatorisk princip som används för att bevisa olika inressanta egenskaper hos ändliga mängder är Dirichlets† lådprincip. Innan vi formulerar Dirichlets sats studerar vi ett exempel.

Exempel 1. Motivera att det bland 11 naturliga tal finns minst två som slutar på samma siffra.

Det finns nämligen 10 olika siffror. Bland 11 naturliga tal måste minst två sluta på samma siffra.

Detta är egentligen **Dirichlets lådprincip**. Den säger:

---

*__MAL200, ht 99__

†J.P.G. Lejeune–Dirichlet (13/2 1805 – 5/5 1859) var en mycket framstående tysk matematiker och fysiker. Ett av hans berömda resultat säger att varje aritmetisk följd $a, a+r, a+2r, a+3r, \ldots$ i vilken a och r är relativt prima, består av oändligt många primtal. T ex är $1, 5, 9, \ldots, 1+4n, \ldots$ en sådan följd. "Lådprincipen" formulerade Dirichlet 1842.

Om man placerar $n+1$ föremål i n lådor så finns det minst en låda med mer än ett föremål.

I exempel 1 är lådorna märkta med 0, 1, 2, ..., 9 (olika siffror). Man har 11 föremål (dvs 11 naturliga tal) som placeras i var sin låda. Minst en låda innehåller minst två tal dvs minst två tal slutar på samma siffra. Vi exemplifierar Dirichlets princip i övning A.

Nu går vi över till multiplikationsprincipen som ofta används för att beräkna antalet olika utfall då man ställs inför olika val. Vi börjar med ett exempel:

Exempel 2. På en tipskupong finns 13 matcher. I varje match har man 3 möjligheter: 1, $\times$ eller 2. Hur många olika tipsrader finns det?

Vi har 3 valmöjligheter i första matchen, 3 valmöjligheter i andra osv. Antalet möjliga utfall i de första två matcherna är $3 \cdot 3 = 9$. I de tre första matcherna har vi $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ olika utfall osv. Antalet olika tipsrader, dvs utfall i de 13 matcherna, är lika med $3 \cdot 3 \cdots 3 = 3^{13}$ (13 faktorer 3).

Rent allmänt har vi följande **multiplikationsprincip** som är grunden för flera kombinatoriska beräkningar:

Om man gör r stycken val så att man har

k_1 *möjligheter vid första valet,*

k_2 *möjligheter vid andra valet, ...,*

k_r *möjligheter vid r-te valet,*

så är antalet möjliga val lika med produkten $k_1 k_2 \cdots k_r$.

Vi skall använda multiplikationsprincipen i två viktiga specialfall.

Permutationer. Vi börjar med ett exempel.

Exempel 3. Vi har 5 bokstäver A, B, C, D, E. Hur många trebokstaviga ord kan vi bilda med hjälp av dessa bokstäver?

Svaret är följande: vi kan välja den första bokstaven på 5 olika sätt. När den är vald, så har vi 4 möjligheter att välja den andra bokstaven. Slutligen har vi 3 möjligheter att välja den sista, tredje bokstaven. Alltså finns det $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ olika "ord".

Mera allmänt, antag att vi har n olika föremål $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ("bokstäver"). Man skall välja en ordnad följd bestående av k stycken av dessa föremål. På hur många olika sätt kan man göra det?

Det första föremålet väljs på n olika sätt, det andra (då det första är valt) på $n-1$ olika sätt, det tredje på $n-2$ olika sätt osv. Det sista, k-te, föremålet väljs på $n-k+1$ olika sätt. Alltså är antalet av alla möjliga val lika med produkten

$$P(n,k) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1).$$

Varje ordnad följd av k stycken föremål bland n givna kallas **en permutation av k element ur n givna**. Talet $P(n,k)$ ovan är antalet sådana permutationer[‡]. Ett viktigt specialfall är då man väljer $k=n$ dvs man väljer alla n element i en bestämd ordning. Då får man

$$P(n,n) = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!.$$

Som vi vet utläses $n!$ som "n fakultet". $n!$ är alltså antalet olika ordningsföljder av n stycken föremål. Varje ordningsföljd av n stycken föremål kallas en **permutation** av dessa föremål.

Kombinationer. Mycket ofta väljer man k föremål bland n givna utan att bry sig om deras inbördes ordning. Då väljer man helt enkelt en delmängd bestående av k föremål ur n. En delmängd av k element ur n givna kallas en **kombination**. Varje sådan delmängd kan ordnas på $k!$ olika sätt. Eftersom antalet ordnade uppsättningar av k föremål ur n är lika med $P(n,k)$, så är antalet delmängder bestående av k element

$$\frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

($k!$ olika ordnade uppsättningar av k stycken föremål ger samma mängd bestående av dessa föremål). Talet ovan betecknas $\binom{n}{k}$ och utläses "n över k" dvs

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Det kallas ofta för **Newtons symbol** eller **binomialkoefficient** (vi diskuterar binomialsatsen nedan). Alltså är antalet kombinationer av k element ur n lika med $\binom{n}{k}$.

Exempel 4. På en lottokupong väljer man 7 av 39 tal. På hur många olika sätt kan detta göras? Svaret är att man väljer en delmängd bestående av 7 tal av 39, vilket kan göras på

$$\binom{39}{7} = \frac{39\cdot 38\cdot 37\cdot 36\cdot 35\cdot 34\cdot 33}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = \ldots$$

[‡]Beteckningen är hämtad från Vretblads bok. I statistikkursen betecknas detta tal med $(n)_k$ och kallas k–faktorial av n.

olika sätt.

Observera att

$$\binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{0} = 1,$$

ty 1 föremål ur n kan väljas på n olika sätt, n föremål ur n på 1 sätt, och 0 föremål ur n på 1 sätt.

Kombinationer förekommer i samband med binomialsatsen. Man betraktar potenser

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

osv. Vad kan man säga rent allmänt om $(a+b)^n$? Vi har

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$$

med n faktorer $a+b$. Till varje term väljer man ett antal b – till den första (som t ex a^4) tar vi noll b, till den andra ett b, till den tredje två b osv. Om k betecknar antalet b i en term så är antalet a lika med $n-k$, ty det sammanlagda antalet a och b i varje term är just n. Detta betyder att varje term har formen $a^{n-k}b^k$. Vilken koefficient har en sådan term? Man väljer k stycken b ur n möjliga b och detta kan göras på $\binom{n}{k}$ olika sätt. Detta är just koefficienten framför $a^{n-k}b^k$. Alltså är

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Det här är **binomialsatsen**. T ex är

$$(a+b)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} a^{5-k} b^k = \binom{5}{0} a^5 b^0 + \binom{5}{1} a^4 b^1 + \binom{5}{2} a^3 b^2 + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a^1 b^4 + \binom{5}{5} a^0 b^5 =$$

$$a^5 + 5a^4b + 10a^2b^3 + 10a^3b^2 + 5b^4 + b^5.$$

I första hand, lös följande uppgifter: **A** 1,2; **B** 1,2; **C** 1,3, 2 – Vretblad 5.7 (507), 5.11 (511); **D** 1, Vretblad 5.25 c (522 b), 5.26 (523).

Övning A

Denna övning ägnas åt Dirichlets lådprincip.

1. Visa att bland dem som tillhör din lektionsgrupp på MAL 200 finns minst två personer som fyller år under samma månad.
2. Visa att bland 101 heltal finns minst två vars skillnad är delbar med 100.
3. I en möteslokal finns ett antal personer (minst 2). Visa att det finns minst två personer som känner lika många bland de övriga.
4. Låt X och Y beteckna två godtyckliga ändliga mängder (X kan tolkas som mängden av föremål, och Y som mängden av lådor). Försök formulera Dirichlets lådprincip som en utsaga om funktioner $f : X \to Y$ då antalet element i X är större än antalet element i Y. Försök rita "ägg och pilar" – vad kan man säga om pilarna från X till Y?

Övning B

Denna övning handlar om multiplikationsprincipen.

1. Man fyller i en tipskupong med endast 1 och $\times$ (hemmaseger eller oavgjort). Hur många tipsrader av denna typ finns det?
2. Lös uppgift 5.6 (506) i Vretblads bok.
3. Låt X_1 vara en mängd med k_1 element och X_2 en mängd med k_2 element. Hur många element har den kartesiska produkten $X_1 \times X_2$? (kartesiska produkten är mängden av alla par (x_1, x_2), där $x_1 \in X_1$ och $x_2 \in X_2$).

Övning C

Denna uppgift ägnas åt permutationer och kombinationer.

1. 10 personer hälsar på varandra genom en handskakning. Hur många handskakningar kommer att utväxlas?
2. Lös uppgifterna 5.7 (507), 5.8 (508) och 5.11 (511) i Vretblads bok.
3. Lös uppgifterna 5.22 (520) och 5.23 (521) i Vretblads bok.

Övning D

Övningen handlar om binomialsatsen.

1. Utveckla $(a^2 + b^3)^3$.
2. Lös uppgifterna 5.25 a,c (522) och 5.26 (523) i Vretblads bok.