Explorativ övning 2

MÄNGDER OCH MÄNGDOPERATIONER*

Syftet med denna övning är att introducera några viktiga begrepp i mängdläran. Mängder förekommer överallt i matematiken. T ex studerar man mängden av de hela talen i aritmetiken, mängden av de reella talen i matematisk analys, mängden av polynom i algebran osv. I denna övning lär vi oss hur man beskriver mängder och hur man utför mängdoperationer. Dessa begrepp spelar en viktig roll och förekommer mycket ofta då man formulerar matematiska påståenden. Vi betraktar följande begrepp:

- Mängder och deras element.
- Delmängder och inklusion.
- Mängdoperationer: union, snitt, differens, komplement.
- Venn–diagram.

Vi använder följande standardbeteckningar:

$\mathbb{N}$ de naturliga talen,

$\mathbb{Z}$ de hela talen,

$\mathbb{Q}$ de rationella talen,

$\mathbb{R}$ de reella talen,

Vi följer avsnitten 1.8 – 1.9 i Vretblads bok. Hänvisningar till nen gamla upplagan av boken ges inom parentes.

*__MAL200, ht 99__

Övning A

1. Ange alla element i följande mängder (beteckningen $\{x \in X|\ ...\ \}$ står för "**mängden av alla x i X sådana att**" – jämför sid. 44 (27) i Vretblads bok):
   (a) $\{n \in \mathbb{N}|\ \ n \leq 10\}$,
   (b) $\{n \in \mathbb{N}|\ \ n^2 < 50\}$,
   (c) $\{x \in \mathbb{R}|\ \ x^2 = 2\}$,
   (d) $\{x \in \mathbb{R}|\ \ |x - 2| = 3\}$,
   (e) $\{x \in \mathbb{R}|\ \ |x - 1| \leq 4\}$,
   (f) $\{x \in \mathbb{Z}|\ \ x^3 \leq 27\}$,
   (g) $\{x \in \mathbb{R}|\ \ x^2 < 0\}$,
   (h) $\{x \in \mathbb{N}|\ \ x^2 - 6x + 8 < 0\}$.
2. Vilka av mängderna ovan är lika? För vilka par av dessa den ena mängden inkluderar den andra (se sid. 44 (27) i Vretblads bok)?

Övning B

1. Bestäm $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ och $B \setminus A$ då
   (a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$,
   (b) $A = \{x \in \mathbb{Z}|\ \ x^2 < 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}|\ \ x^3 < 27\}$,
   (c) $A = \{x \in \mathbb{N}|\ \ x < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}|\ \ x < 1\}$,
   (d) $A =$ mängden av alla liksidiga trianglar, $B =$ mängden av alla likbenta trianglar,
   (e) $A =$ mängden av alla romber, $B =$ mängden av alla rektanglar.

Övning C

1. Diskutera hur de logiska konnektiven används för att beskriva mängdoperationer. Vilka konnektiv svarar mot vilka mängdoperationer? Hur är det med negationen?
2. Låt A och B beteckna mängder. Vad säger utsagan

$$\forall x \qquad (x \in A \Rightarrow x \in B)?$$

   Rita motsvarande Venn–diagram.
3. Försök skriva ut en utsaga som säger att två mängder A och B är lika.

Övning D

1. Kontrollera följande relationer mellan mängder A, B, C genom rita Venn–diagram som svarar mot vänster– och högerled:
   (a) $A \cup (A \cap B) = A$,
   (b) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,
   (c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
   (d) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.
2. Ge exempel på mängder A, B, C sådana att följande relationer gäller och sådana att de inte gäller:
   (a) $(A \cap B) \cup (B \cap C) = B$,
   (b) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$,
   (c) $[(A \cup B) \setminus C] \subseteq A$.
   Kan Du ge något villkor på A, B, C så att relationen gäller?

Övning E

1. Gör övningar 1.34 (125), 1.35 (126) och 1.36 (127) i Vretblads bok.
2. Hur ser de Morgans lagar ut för mängder? (jfr övning 1.16 (113) i Vretblads bok).

Följande övningar i Vretblads bok rekommenderas:

Vretblad: 1.27 (119), 1.29 (121), 1.31 (122), 1.41 (132), 1.44 (134), 1.45 (135), 1.52 (144).