Explorativ övning 5

MATEMATISK INDUKTION[*]

Syftet med denna övning är att introducera en av de viktigaste bevismetoderna i matematiken – **matematisk induktion**. Termen “induktion” är lite olycklig därför att matematisk induktion är en i högsta grad deduktiv metod. Men faktum är att ett bevis med hjälp av matematisk induktion mycket ofta baseras på vanlig induktion dvs en serie av matematiska experiment som leder till en generalisering – man formulerar en förmodan (en hypotes) och därefter ger man ett strängt bevis med hjälp av matematisk induktion. Vi skall exemplifiera bevis med matematisk induktion nedan. Du kan också läsa avsnitt 4.2 i Vretblads bok.

Vi börjar med ett exempel för att därefter formulera induktionsprincipen.

Exempel. Undersök vilka belopp som kan betalas med tvåkronors– och femkronorsmynt (t ex i Danmark finns det sådana). Formulera en förmodan och ge ett bevis.

Lösning[†]. Vi har redan sysslat med den uppgiften i Övning 3. Det är klart att beloppen 1 krona och 3 kronor inte kan betalas. Men det verkar som att varje belopp större än 3 kronor kan betalas med givna mynt ($4 = 2 \cdot 2$, $5 = 5 \cdot 1$, $6 = 2 \cdot 3$, $7 = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1$ osv.). Vi formulerar detta som vår förmodan och försöker ge ett bevis. Vi antar att ett belopp på k kronor, där $k \geq 4$ kan betalas dvs

$$k = 2x + 5y$$

dvs k kronor betalas med x tvåkronorsmynt och y femkronorsmynt. Nu vill vi visa att även beloppet på $k + 1$ kronor kan betalas med dessa mynt.

Vi resonerar så här. Om antalet av femkronorsmynt är minst 1 dvs $y \geq 1$ så ersätter vi ett

[*] **MAL 200, ht 99**

[†] Uppgiften kan lösas på flera andra sätt.

sådant mynt med 3 stycken tvåkronorsmynt (i stället får vi 6 kronor). I matematiska termer betyder det att

$$k + 1 = 2(x + 3) + 5(y - 1).$$

Om däremot $y = 0$ dvs man betalar $k = 2x$ kronor med enbart tvåkronorsmynt, så måste $x \geq 2$ (ty $k \geq 4$). I sådant fall ersätter vi två stycken tvåkronorsmynt med en "femma". I matematiska termer:

$$k + 1 = 2(x - 2) + 5$$

Alltså gäller implikationen:

Om ett belopp k kronor kan betalas och $k \geq 4$, så kan beloppet $k + 1$ kronor betalas.

Nu drar vi slutsatsen att varje belopp på minst 4 kronor kan betalas med två– och femkronorsmynt. Vi vet nämligen att 4 kronor kan betalas och möjligheten att kunna betala k kronor med $k \geq 4$ implicerar möjligheten att kunna betala nästa belopp på $k + 1$ kronor. □

Resonemanget ovan är just ett exempel på **matematisk induktion**. Induktionsprincipen fungerar på följande sätt. Man har en följd av påståenden $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$ (i vårt exempel ovan är påståendena: P_1 = "4 *kronor kan betalas med givna mynt*", P_2 = "5 *kronor kan betalas med givna mynt*", P_3 = "6 *kronor kan betalas med givna mynt*" osv.). **Induktionsprincipen** säger följande:

Låt $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ vara en följd av påståenden sådan att
1. *det första påståendet P_1 är sant*
och
2. *för varje $k \geq 1$ gäller implikationen: om påståendet P_k är sant så är påståendet P_{k+1} också sant.*
Då är alla påståenden P_n för $n = 1, 2, 3, \ldots$ sanna.

Slutsatsen bygger på följande resonemang: P_1 är sant. Att P_1 är sant medför att P_2 är sant. Alltså är P_2 sant. Att P_2 är sant medför att P_3 är sant. Alltså är P_3 sant. Att P_3 är sant medför att P_4 är sant. Alltså är P_4 sant osv. Vi sluter oss till att P_n är sant för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Denna motivering är inte ett bevis av induktionsprincipen som är en mycket viktig egenskap hos de naturliga talen. Vi diskuterar denna princip senare i kursen i samband med de naturliga talens egenskaper. Innan vi övergår till övningar låt oss notera att ett bevis av implikationen "*om P_k gäller så gäller P_{k+1}*" kallar man för **induktionssteget**. Förutsättningen att P_k gäller kallas vanligen **induktionsantagandet**.

Det finns flera enkla modifikationer av induktionsprincipen. Vi möter dessa modifikationer i olika bevis. Vi ger exempel på ett antal mycket vanliga tillämpningar av induktionsmetoden i samband med övningar nedan. Vi diskuterar också andra exempel på föreläsningen.

Övning A

1. Man berättar ofta följande händelse ur C.F Gauss [‡] liv. Gauss matematiklärare ville sysselsätta sina elever under en längre stund. Han beordrade dem då att beräkna summan av alla naturliga tal från 1 till 100 dvs summan:

   $$\sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100.$$

   Gauss, som då var 8 år gammal, kom med sin lösning efter en kort stund – summan är lika med 5050. Gauss tänkte så här. Betrakta i stället två summor:

   $$S(100) = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100$$

   och

   $$S(100) = 100 + 99 + 98 + \cdots + 2 + 1.$$

   När man parar ihop motsvarande termer (första med första, andra med andra, osv) så får man 100 par och summan i varje par är 101. Alltså är

   $$2S(100) = 100 \cdot 101.$$

   Detta ger

   $$S(100) = \frac{1}{2}10100 = 5050.$$

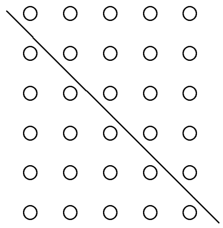
2. Försök generalisera Gauss metod och skriv ut formeln för summan

   $$S(n) = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n$$

   av n efterföljande heltal.

[‡] Carl Friedrich Gauss (30/4 1777 – 23/2 1855) var en av de mest framstående matematikerna genom tiderna. I sin doktorsavhandling (1799) sysslade han med polynomekvationer och visade en mycket viktig sats som ibland kallas “algebrans fundamentalsats” (idag snarare polynomalgebrans fundamentalsats”). Hans mest kända verk heter “Disquisitiones Arithmeticae” (1801) och handlar mest om talteori. 17 år gammal visade Gauss hur man kan konstruera en regelbunden 17-hörning med passare och linjal. Detta avgjorde hans val mellan matematik och lingvistik som var ett annat av hans stora intressen. Gauss sysslade också med fysik och astronomi.

3. Betrakta följande bild och använd den för att bevisa formeln för $S(n)$ i enlighet med Gauss idé (bilden svarar mot $n = 5$):



4. Ge ett bevis av formeln för $S(n)$ med hjälp av matematisk induktion.

Övning B

1. Betrakta följande bilder och summera ettorna i varje tabell på två olika sätt – i hela kvadraten (ett sätt) och som summor av ettorna i varje “vinkel” (det andra sättet):

$$\begin{array}{c} 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

   Vilka formler för antalet ettor i varje kvadrat får man? Kan Du generalisera resultaten till en formel giltig för varje $n \times n$ – kvadrat?

2. Försök nu ge ett induktivt bevis (dvs ett bevis med hjälp av matematisk induktion) för Din formel.

   Ledning. Detta bevis finner Du som exempel i slutet av denna stencil eftersom det är vårt första exempel på ett bevis av en likhet mellan två uttryck. Men försök först att skriva ett bevis på egen hand. Liknande exempel följer nedan.

Övning C

1. Studera summor

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

för $n = 2, 3, 4, 5$. Ställ upp en förmodan och bevisa Ditt påstående med matematisk induktion.

2. Observera att

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

och utnyttja likheten till att bestämma en formel för summan ovan.

Övning D

1. Bevisa med matematisk induktion att

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

2. Man definierar $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ (man utläser symbolen $n!$ som "n fakultet"). Visa att

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

Övning E

Matematisk induktion används mycket ofta för att bevisa olikheter. Vi ägnar denna övning åt olikheter.

1. Studera beviset av olikheten $3^n > n^3$ då $n \geq 4$ i Vretblads bok på sid. 101 (75).
2. Bevisa på liknande sätt olikheten $2^n > n^2$ då $n \geq 5$.

Övning F

1. Betrakta talföljden $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$. Kan Du skriva ut några efterföljande tal?
2. Låt a_k beteckna $k-$te talet i följden dvs $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$ osv. Ange sambandet mellan a_{k+1} och a_k då $k \geq 1$.

   Anmärkning. Låt $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1} \ldots$ vara en talföljd. En formel som uttrycker a_{k+1} med hjälp av a_k (ibland även tidigare termer som t ex a_{k-1}) kallas en **rekursionsformel** (se exempel i Vretblads bok på sid. 103 (77).

3. Kan Du uttrycka a_n med hjälp av n? Försök! Svaret finns på slutet av denna stencil. Bevisa Din formel med matematisk induktion.

4. Lös uppgift 4.30 (424) i Vretblads bok. Observera att man här måste använda en modifikation av induktionsprincipen: Man kontrollerar att *de två första påståendena* P_1 *och* P_2 *gäller*. Därefter visar man implikationen: *för varje* $k \geq 1$, *om* P_k *och* P_{k+1} *gäller så gäller också* P_{k+2}.

Övning G

Vi skall fortsätta tankegången från Övning B och summera både de naturliga talen och deras kvadrater (om Du tycker att det är roligt så kan Du med samma metoder gå vidare och summera t ex tredje eller fjärde potenser av de naturliga talen osv).

1. Vi börjar med summan

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

Studera följande tabeller och summera talen på två olika sätt som i Övning B:

$$
\begin{array}{c}
1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
1 & 2 \\
1 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
1 & 2 & 3 \\
1 & 2 & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & 4 \\
1 & 2 & 3 & 4 \\
1 & 2 & 3 & 4 \\
1 & 2 & 3 & 4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 3 & k & n \\
1 & 2 & 3 & k & n \\
1 & 2 & 3 & k & n \\
 & & & & \\
1 & 2 & 3 & k & n \\
 & & & & \\
1 & 2 & 3 & k & n
\end{array}
$$

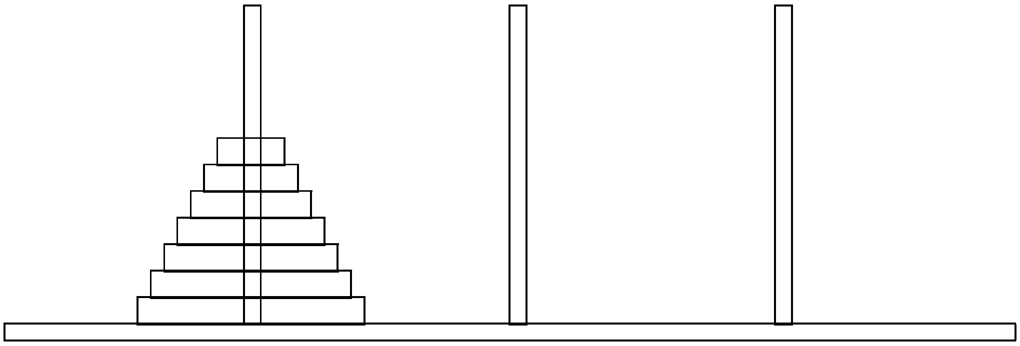
Utnyttja formeln för summation av de naturliga talen som vi fick i uppgiften om summan $1 + 2 + \cdots + n$. Det behövs några omskrivningar innan man kommer åt den sökta summan av kvadraterna. När Du får en formel kontrollera först att den är riktig för, säg, $n = 1, 2, 3, 4$.

2. Utnyttja de två olika sätten att summera ettorna i Övning B för att få formeln för $S_1(n) = 1 + 2 + \cdots + n$. Den uppgiften är något enklare än förra, men det krävs också en enkel omskrivning.

3. Försök ge en formel för $S_3(n) = \sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ genom att placera $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$ i stället för $1, 2, 3, \ldots, n$ i tabellerna ovan. Bevisa formeln med matematisk induktion. (Du behöver inte göra den uppgiften om Du inte har tid. För den sökta formeln se eventuellt svar på slutet av denna stencil.)

Övning H

"Tornen i Hanoi". Problemet formulerades år 1883 av den franske matematikern Édouard Lucas under pseudonym M. Claus[§]. På en platta med 3 pinnar sitter n stycken skivor med olika diameter på en av pinnarna (bilden visar $n = 7$ skivor – detta är antalet skivor på en IKEA–model som kan köpas för 35 kronor).



Dessa skivor skall flyttas till en annan pinne med hänsyn till följande regler:

R1. Endast en skiva kan flyttas vid varje drag och sättas på en annan pinne.

R2. En större skiva får inte placeras på en mindre.

1. Lös uppgiften för $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ skivor (Du kan "konstruera" Ditt eget spel genom att välja 7 föremål av olika storlek som kan läggas på varandra).

2. Antag att Du har löst problemet för t ex 6 skivor. Hur kan Du beskriva Din strategi för att lösa problemet för 7 skivor?

3. Kan Du bevisa att det alltid går att lösa problemet för varje n? Hur kan man utnyttja matematisk induktion?

4. Hur många drag behövs det för att lösa problemet för n skivor?

Övning I

1. Försök hitta ett fel i följande "bevis" med matematisk induktion. Vi påstår att *alla människor har samma ögonfärg.* Satsen är självklart sann om antalet människor n är lika med 1. Antag att satsen är sann för antalet människor lika med k dvs antag att i varje population med k individer har alla samma ögonfärg. Ta nu $k + 1$ människor.

[§]Detta enligt Ian Stewarts bok "The Magical Maze" med undertiteln "Seeing the world through mathematical eyes". Boken kom ut 1997 i London. I boken citeras en saga som berättar om bakgrunden till problemet med "Tornen i Hanoi" eller snarare tornen i världens medelpunkt vid Benares templet. I Ian Stewarts bok finns flera mycket intressanta matematiska problem som inte förutsätter några förkunskaper i ämnet.

Utelämna en människa i gruppen. De återstående k har samma ögonfärg enligt induktionsantagandet. Ta nu den människa som vi har utelämnat och jämför hennes ögonfärg med en av dem som ingår i gruppen på k människor. De har samma ögonfärg enligt induktionsantagandet. Alltså har alla $k+1$ samma ögonfärg. Nu gäller påståendet för $n = 1$ och om det gäller för k så gäller det för $k+1$. Enligt induktionsprincipen gäller påståendet för varje $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ dvs alla människor har samma ögonfärg.

Följande övningar i Vretblads bok rekommenderas:

Vretblad: 4.9 (408), 4.12 (410), 4.14 (412), 4.20 (416), 4.21 (417), 4.25 (421), 4.29 (423), 4.33 (427).

Några lösningar och svar:

Övning B:

Vi vill visa att för varje $n \geq 1$ gäller likheten

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Först kontrollerar vi att likheten gäller då $n = 1$ (“påståendet P_1”):

$$\text{V.L.} = 1 \quad \text{och} \quad \text{H.L.} = 1^2$$

så att V.L = H.L.

Nu antar vi att likheten gäller för ett naturligt tal $k \geq 1$ (“påståendet P_k”) dvs

$$1 + 3 + \cdots + (2k-1) = k^2.$$

Vi vill visa att likheten då måste gälla för nästa tal $k+1$ (“påståendet P_{k+1}”) dvs

$$1 + 3 + \cdots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2.$$

(Vi vill visa att påståendet P_k medför påståendet P_{k+1}).

Vi startar med vänsterledet i sista likheten och utnyttjar förutsättningen att näst sista likhet gäller:

$$[1+3+\cdots+(2k-1)]+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2.$$

Vi har bevisat påståendet för $k+1$ under förutsättningen att påståendet gäller för k. Därmed kan vi konstatera att likheten enligt induktionsprincipen gäller för varje naturligt tal $n \geq 1$.

Övning F:

Svar: $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Övning G 3:

Svar: $S_3(n) = \sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$